53. Beweisen Sie die Assoziativität des Matrixprodukts $A(BC) = (AB)C$.

54. Bestimmen Sie

    (a) den Rang der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 5 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

    (b) Betrachten Sie die zur Matrix A gehörende lineare Abbildung $\sigma : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ und berechnen Sie $ker\, \sigma$.

    (c) $Im\, \sigma = ?$

55. Gegeben ist eine lineare Transformation $\sigma \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$: $\vec{x} \to \vec{x}' = \sigma(\vec{x})$. Betrachten Sie die entsprechende Matrixdarstellung $X' = AX$, wo A eine reelle $n \times n$ Matrix ist.

    (a) welche Bedingung muss A erfüllen, damit $\vec{x}'^2 = \vec{x}^2$ gilt?

    (b) Formulieren Sie die Bedingung in Indexschreibweise und Matrixschreibweise.

    (c) Berechnen Sie explizit die Matrix A in 2 Dimensionen.

56. Im $\mathbb{C}^2$ sei durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung gegeben. Berechnen Sie die geänderte Matrix A nach Durchführen einer Basistransformation mit $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

57. Lösen Sie das homogenen Gleichungssystem $AX = 0$ für
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie für A=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$