1. Geben Sie einen geeigneten Definitionsbereich für die Differentialform ω an

$$\omega = \alpha\, dx_1 + \beta\, \frac{x_1}{x_2}\, dx_2$$

und

   (a) zeigen Sie, dass ω keine exakte Differentialform ist.

   (b) Finden (erraten) Sie einen integrierenden Faktor $\mu(x_1, x_2)$ sodass $\upsilon := \mu\,\omega$ exakt ist.

2. Betrachten Sie die folgenden Differentialform auf $\mathbf{R^2}$

$$\omega = x_2 dx_1$$

Untersuchen Sie mittels der Integrabilitätsbedingung, ob ω exakt ist! Vergleichen Sie überdies die Wegintegrale $\int_\gamma \omega$ für die Wege (i) γ ist eine gerade Strecke von (1,1) bis $(2,\frac{1}{4})$, (ii) γ ist ein Teilstück von $x_2 = 1/x_1^2$ von (1,1) bis $(2,\frac{1}{4})$.

3. Sei ω eine Differentialform auf $\mathbf{R^2} \setminus (0,0)$

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

Ist ω exakt? Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ für einen Einheitskreis um den Ursprung in der (x,y)-Ebene.

4. Beweisen Sie für $f = f(u,v),\ g = g(u,v),\ u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ die Kettenregel

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\,\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

für Jacobi-Determinanten

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_u - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)_v$$

Freiwillige Zusatzaufgabe: Gewinnen Sie aus der Definition der Jacobi-Determinante und der Kettenregel durch die spezielle Wahl von $x = f,\ y = g,\ g = v$, dass

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial f}\right)_v}, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u}{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_f}$$

5. Sir Hillary erhitzte $1\,m^3$ Wasser von $20°C$ auf $40°C$, um vor der Besteigung des Mt. Everest zu baden ($C = 4,2\,kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}$). Berechnen Sie die Energie in kWh, die er dafür benötigte. Zeigen Sie, dass diese Energie ausreicht, um seine Seilschaft (14 Bergsteiger von je $68kg$) vom Meeresniveau bis zum Mt. Everest Gipfel (8.848 Metern über dem Meeresspiegel) zu heben.