

Übungen zu T2 Quantenmechanik im SS 2011

Aufgabe 47

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Drehimpulsoperatoren J_{\pm} und J_3 bezüglich der Basis $|j = 1, m\rangle$ und verifizieren Sie die Drehimpulsalgebra.

Aufgabe 48

Die freie Drehbewegung eines Moleküls wird durch den Hamiltonoperator

$$H_{rot} = \sum_{k=1,2,3} L_k^2 / (2I_k)$$

beschrieben. L_k erfüllen die Drehimpulsalgebra und I_k sind die Hauptträgheitsmomente. Berechnen Sie die Eigenwerte unter der Annahme $I_1 = I_2$.

Aufgabe 49

Ein Spin 1/2-Teilchen habe die Bahndrehimpulsquantenzahl l . Konstruieren Sie die Eigenzustände von \hat{J}^2 und \hat{J}_z .

Aufgabe 50

Vergleichen Sie die radiale Schrödingergleichung mit Potential $V(r)$ mit der eindimensionalen Schrödingergleichung mit Potential $V(x)$, wobei die Funktion V symmetrisch von \mathbf{R}_+ auf \mathbf{R} fortgesetzt wird. Welche Energieeigenwerte sind gleich und welche Aussage kann man über die Existenz eines gebundenen Zustands in den beiden Fällen machen?

Aufgabe 51

Das dreidimensionale harmonische Oszillatorpotential lautet $V(r) = m\omega^2 r^2 / 2$. Lösen Sie die entsprechende zeitunabhängige Schrödingergleichung durch Separation in kartesischen Koordinaten und bestimmen Sie das Energiespektrum.

Aufgabe 52

Führen Sie in der radialen Schrödingergleichung für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator die neue Variable $s \equiv r^2$ ein und setzen Sie $R(r) \equiv s^{1/4} S(s)$. Wie sind die Konstanten $l(l+1)$, $m\omega^2$ und E abzuändern, damit sich die entsprechende Gleichung für das Coulomb-Potential ergibt?

Aufgabe 53

Im He-Atom besetze ein Elektron den Grundzustand $|1, 0, 0, m_s\rangle$, das andere den Zustand $|2, 1, m_l, m_s\rangle$. Was sind die möglichen Werte von J und J_z und wie liegen die entsprechenden Energieniveaus relativ zueinander?

Aufgabe 54

Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes. Betrachten Sie Atome im thermischen Gleichgewicht, nämlich eine Anzahl N_g im Grundzustand und N_e im angeregten Zustand. Ist die Energiedifferenz der beiden Zustände E , dann ist bekanntlich bei Temperatur T

$$\frac{N_e}{N_g} = \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right).$$

Der Übergang zwischen den beiden Zuständen erfolgt durch Emission bzw. Absorption eines Photons der Energie E . Sei P die Wahrscheinlichkeit für Absorption eines Photons durch ein Atom im Grundzustand = Wahrscheinlichkeit für Emission durch ein angeregtes Atom *in das Vakuum* (warum sind die beiden gleich?). Berechnen Sie die mittlere Photonenzahl \bar{n} im thermischen Gleichgewicht durch Gleichsetzen der Emissions- und Absorptionsrate.