

# Übungen zu T2 Quantenmechanik im SS 2011

## Aufgabe 47

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der Drehimpulsoperatoren  $J_{\pm}$  und  $J_3$  bezüglich der Basis  $|j = 1, m\rangle$  und verifizieren Sie die Drehimpulsalgebra.

## Aufgabe 48

Die freie Drehbewegung eines Moleküls wird durch den Hamiltonoperator

$$H_{rot} = \sum_{k=1,2,3} L_k^2 / (2I_k)$$

beschrieben.  $L_k$  erfüllen die Drehimpulsalgebra und  $I_k$  sind die Hauptträgheitsmomente. Berechnen Sie die Eigenwerte unter der Annahme  $I_1 = I_2$ .

## Aufgabe 49

Ein Spin 1/2-Teilchen habe die Bahndrehimpulsquantenzahl  $l$ . Konstruieren Sie die Eigenzustände von  $\hat{J}^2$  und  $\hat{J}_z$ .

## Aufgabe 50

Vergleichen Sie die radiale Schrödingergleichung mit Potential  $V(r)$  mit der eindimensionalen Schrödingergleichung mit Potential  $V(x)$ , wobei die Funktion  $V$  symmetrisch von  $\mathbf{R}_+$  auf  $\mathbf{R}$  fortgesetzt wird. Welche Energieeigenwerte sind gleich und welche Aussage kann man über die Existenz eines gebundenen Zustands in den beiden Fällen machen?

## Aufgabe 51

Das dreidimensionale harmonische Oszillatorpotential lautet  $V(r) = m\omega^2 r^2 / 2$ . Lösen Sie die entsprechende zeitunabhängige Schrödingergleichung durch Separation in kartesischen Koordinaten und bestimmen Sie das Energiespektrum.

## Aufgabe 52

Führen Sie in der radialen Schrödingergleichung für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator die neue Variable  $s \equiv r^2$  ein und setzen Sie  $R(r) \equiv s^{1/4} S(s)$ . Wie sind die Konstanten  $l(l+1)$ ,  $m\omega^2$  und  $E$  abzuändern, damit sich die entsprechende Gleichung für das Coulomb-Potential ergibt?

## Aufgabe 53

Im He-Atom besetze ein Elektron den Grundzustand  $|1, 0, 0, m_s\rangle$ , das andere den Zustand  $|2, 1, m_l, m_s\rangle$ . Was sind die möglichen Werte von  $J$  und  $J_z$  und wie liegen die entsprechenden Energieniveaus relativ zueinander?

#### Aufgabe 54

*Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetzes.* Betrachten Sie Atome im thermischen Gleichgewicht, nämlich eine Anzahl  $N_g$  im Grundzustand und  $N_e$  im angeregten Zustand. Ist die Energiedifferenz der beiden Zustände  $E$ , dann ist bekanntlich bei Temperatur  $T$

$$\frac{N_e}{N_g} = \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right).$$

Der Übergang zwischen den beiden Zuständen erfolgt durch Emission bzw. Absorption eines Photons der Energie  $E$ . Sei  $P$  die Wahrscheinlichkeit für Absorption eines Photons durch ein Atom im Grundzustand = Wahrscheinlichkeit für Emission durch ein angeregtes Atom *in das Vakuum* (warum sind die beiden gleich?). Berechnen Sie die mittlere Photonenzahl  $\bar{n}$  im thermischen Gleichgewicht durch Gleichsetzen der Emissions- und Absorptionsrate.