Übungen zu T2 Quantenmechanik im SS 2011

Aufgabe 38

Zeigen Sie, dass es keine endlich-dimensionalen Matrizen $\hat{x}$, $\hat{p}$ mit $[\hat{x}, \hat{p}] = i$ gibt. (Hinweis: Verwenden Sie die Spur.)

Aufgabe 39

Ein allgemeiner Strahlteiler wird charakterisiert durch Angabe der Übergangsamplituden $S_{XY} \equiv \langle X, ein | Y, aus \rangle$, wobei $X, Y = L$ *oder* R. $|L, ein\rangle$ steht für ein Photon, das von links auf den Strahlteiler einfällt, $|R, aus\rangle$ für ein Photon, das den Strahlteiler nach rechts verlässt, usw. Wir betrachten nur Photonen derselben Energie und Polarisation und lassen daher alle weiteren Zustandsparameter weg.
a) Berechnen Sie aus diesen Übergangsamplituden die Wahrscheinlichkeiten für Reflexion, Transmission und Absorption durch den Strahlteiler.
b) Der Strahlteiler sei verlustfrei. Welche mathematische Eigenschaft impliziert das für die Matrix **S** der Übergangsamplituden?

Aufgabe 40

Fortsetzung von Aufgabe 39, der Strahlteiler ist verlustfrei vorausgesetzt.
a) Zeigen Sie, dass die Matrix **S** bis auf einen Phasenfaktor die Form

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} r & t \\ -t^* & r^* \end{pmatrix}$$

mit $|r|^2 + |t|^2 = 1$ hat. Warum kann dieser Phasenfaktor durch 1 ersetzt werden?
b) Sei δ_L (δ_R) die Phasenverschiebung zwischen der reflektierten und der transmittierten Welle eines von links (rechts) einlaufenden Photons. Zeigen Sie $\delta_L + \delta_R = \pi$.

Aufgabe 41

Fortsetzung von Aufgabe 40.
a) Wie vereinfacht sich die Matrix **S** für einen symmetrischen Strahlteiler?
b) Wie lautet die Matrix **S**, wenn der Strahlteiler außerdem genau halbdurchlässig ist?

Aufgabe 42

Bestimmen Sie die normierten Wellenfunktionen der gebundenen Zustände des endlich tiefen Potentialtopfs.

Aufgabe 43

Bestimmen Sie die Reflexions- und Transmissionsamplitude für den Tunneleffekt an der rechteckigen Potentialschwelle aus den Stetigkeitsbedingungen an die Wellenfunktion.

Aufgabe 44

Bestimmen Sie die Orts- und Impulsunschärfe Δx und Δp der Energieeigenzustände des harmonischen Oszillators.

Aufgabe 45

Bestimmen Sie die Matrizen der Operatoren a und $a^\dagger$ in der Energiedarstellung des harmonischen Oszillators.

Aufgabe 46

a) Entwickeln Sie den kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ nach der Orthonormalbasis der Energieeigenzustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators.

b) Bestimmen Sie aus a) die Wahrscheinlichkeit, in diesem Zustand n Energiequanten anzutreffen, und drücken Sie diese durch den Erwartungswert $\langle N\rangle$ der Besetzungszahl aus.