

# Übungen zu T2 Quantenmechanik im SS 2011

## Aufgabe 20

Geben Sie ein Kriterium für das asymptotische Abfallverhalten einer Funktion

a)  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$  in der Form  $f \rightarrow O(|x^\alpha|)$ ,

b)  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^3)$  in der Form  $f \rightarrow O(|\vec{x}^\alpha|)$ .

c) Kann man aus dem asymptotischen Abfallverhalten einer differenzierbaren Funktion  $f$  auf dasjenige von  $f'$  bzw.  $|\vec{\nabla}f|$  schließen?

## Aufgabe 21

Folgern Sie aus der klassischen Unschärferelation  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 |\tilde{f}(k)|^2 dk \geq 1/4$ , dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (k - k_0)^2 |\tilde{f}(k)|^2 dk \geq 1/4 \quad \forall x_0, k_0 \in \mathbf{R}.$$

Welche Wahl von  $x_0$  und  $k_0$  liefert ein natürliches Maß für die Breite der Verteilung von  $f$  im Orts- bzw. Wellenzahlraum?

## Aufgabe 22

Der Wellenzahlvektorraum  $\mathbf{R}^3$  werde durch den dreidimensionalen Torus  $\mathbf{T}^3$  mit Periodizitätslängen  $K$  ersetzt. Welche Modifikation des Ortsraums wird dadurch impliziert? Wie lautet die Normierungsbedingung für eine Wellenfunktion im neuen Ortsraum? Geben Sie die normierte Wellenfunktion eines zu  $t = 0$  im Punkte  $\vec{x}_0$  lokalisierten Teilchens an.

## Aufgabe 23

Zeigen Sie, dass die Substitution  $V \rightarrow V + f(t)$  in der Schrödingergleichung durch Multiplikation der Wellenfunktion  $\psi$  mit einem Phasenfaktor kompensiert werden kann.

## Aufgabe 24

Leiten Sie aus der Kontinuitätsgleichung für Lösungen der Schrödingergleichung mit Hilfe des Satzes von Gauß die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit her.

## Aufgabe 25

Berechnen Sie mit Hilfe der de Broglie-Relationen die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Wellenfunktion für ein relativistisches Teilchen der Masse  $m$  mit ungefährem Impulswert  $p$ . Vergleichen Sie diese mit der Lichtgeschwindigkeit.

## Aufgabe 26

Ein normiertes eindimensionales Wellenpaket habe zu  $t = 0$  die Fouriertransformierte  $\tilde{\psi}(k) = N e^{-k^2/2a^2}$ . Bestimmen Sie  $N$  und berechnen Sie  $\psi(t, x)$ .

### Aufgabe 27

Bestimmen Sie für das Wellenpaket aus Aufgabe 26 die Orts- und Impulsunschärfe  $\Delta x$  und  $\Delta p$  als Funktion der Zeit.

### Aufgabe 28

Ein Teilchen mit  $m = 10^{-6}g$  ruht und wird zu  $t = 0$  durch ein Gauß-Wellenpaket mit einer Ortsunschärfe von  $10^{-2}cm$  beschrieben. Wie lange dauert es, bis sich seine Ortsunschärfe verdoppelt hat? Analog sei für ein Elektron die Unschärfe zuerst  $10^{-10}cm$ . Wann wird die Ausdehnung  $1m$  sein?