

Übungen zu T2 Quantenmechanik im SS 2011

Aufgabe 20

Geben Sie ein Kriterium für das asymptotische Abfallverhalten einer Funktion

a) $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ in der Form $f \rightarrow O(|x^\alpha|)$,

b) $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^3)$ in der Form $f \rightarrow O(|\vec{x}^\alpha|)$.

c) Kann man aus dem asymptotischen Abfallverhalten einer differenzierbaren Funktion f auf dasjenige von f' bzw. $|\vec{\nabla}f|$ schließen?

Aufgabe 21

Folgern Sie aus der klassischen Unschärferelation $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 |\tilde{f}(k)|^2 dk \geq 1/4$, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (k - k_0)^2 |\tilde{f}(k)|^2 dk \geq 1/4 \quad \forall x_0, k_0 \in \mathbf{R}.$$

Welche Wahl von x_0 und k_0 liefert ein natürliches Maß für die Breite der Verteilung von f im Orts- bzw. Wellenzahlraum?

Aufgabe 22

Der Wellenzahlvektorraum \mathbf{R}^3 werde durch den dreidimensionalen Torus \mathbf{T}^3 mit Periodizitätslängen K ersetzt. Welche Modifikation des Ortsraums wird dadurch impliziert? Wie lautet die Normierungsbedingung für eine Wellenfunktion im neuen Ortsraum? Geben Sie die normierte Wellenfunktion eines zu $t = 0$ im Punkte \vec{x}_0 lokalisierten Teilchens an.

Aufgabe 23

Zeigen Sie, dass die Substitution $V \rightarrow V + f(t)$ in der Schrödingergleichung durch Multiplikation der Wellenfunktion ψ mit einem Phasenfaktor kompensiert werden kann.

Aufgabe 24

Leiten Sie aus der Kontinuitätsgleichung für Lösungen der Schrödingergleichung mit Hilfe des Satzes von Gauß die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit her.

Aufgabe 25

Berechnen Sie mit Hilfe der de Broglie-Relationen die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Wellenfunktion für ein relativistisches Teilchen der Masse m mit ungefährem Impulswert p . Vergleichen Sie diese mit der Lichtgeschwindigkeit.

Aufgabe 26

Ein normiertes eindimensionales Wellenpaket habe zu $t = 0$ die Fouriertransformierte $\tilde{\psi}(k) = N e^{-k^2/2a^2}$. Bestimmen Sie N und berechnen Sie $\psi(t, x)$.

Aufgabe 27

Bestimmen Sie für das Wellenpaket aus Aufgabe 26 die Orts- und Impulsunschärfe Δx und Δp als Funktion der Zeit.

Aufgabe 28

Ein Teilchen mit $m = 10^{-6}g$ ruht und wird zu $t = 0$ durch ein Gauß-Wellenpaket mit einer Ortsunschärfe von $10^{-2}cm$ beschrieben. Wie lange dauert es, bis sich seine Ortsunschärfe verdoppelt hat? Analog sei für ein Elektron die Unschärfe zuerst $10^{-10}cm$. Wann wird die Ausdehnung $1m$ sein?