Übungen zur Theoretischen Physik II: Quantenmechanik I, SS 2010

Prof. Dr. R.A. Bertlmann, S. Arroyo Camejo, B.Sc.

Blatt 9

31) Der Erzeuger von kohärenten Zuständen $|\alpha\rangle$ ist der displacement operator

$$D(\alpha) := \exp\left(\alpha\, a^\dagger - \alpha^* a\right),$$

mit dem Vernichter- bzw. Erzeugeroperator a und $a^\dagger$.

Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

(i) $D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha)$

(ii) $D^\dagger(\alpha)\, a\, D(\alpha) = a + \alpha$

(iii) $D^\dagger(\alpha)\, a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$

(iv) $D(\alpha + \beta) = D(\alpha)D(\beta)\exp\left(-i\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)\right)$

32) Beweisen Sie, dass für den Drehimpulsoperator $L_i = \epsilon_{ijk}X_jP_k$ folgende Algebra gilt:

a) $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$

b) $[L_i, X_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}X_k$

c) $[L_i, P_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}P_k$.

33) Ein Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ sei in dem Zustand

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in den Spinzuständen

$$|{\uparrow}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |{\downarrow}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu messen?

©S. Arroyo Camejo 2010

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \sigma_z \rangle$ im Zustand $|s\rangle$, wobei die Pauli Matrix σ_z gegeben ist durch

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

34) a) Stellen Sie den Spin-Drehoperator

$$U(\alpha) = \exp(-\frac{i}{2}\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})$$

als 2×2-Matrix dar.

b) Wenden Sie die Spin-Drehoperator-Matrix auf die Spin-Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ an.

Hinweis: Wählen Sie eine Darstellung in Polarkoordinaten, wobei $\vec{\alpha} = \alpha \cdot \vec{n}$ mit $\vec{n} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$ gesetzt sei.

©S. Arroyo Camejo 2010