Übungen zur Theoretischen Physik II: Quantenmechanik I, SS 2010

Prof. Dr. R.A. Bertlmann, S. Arroyo Camejo, B.Sc.

Blatt 3

9) Betrachten Sie die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{\jmath}(\vec{x},t) = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass diese erfüllt ist, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\vec{x},t)$ und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{\jmath}(\vec{x},t)$ folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{x},t) &:= \psi^*(\vec{x},t)\,\psi(\vec{x},t) \\
\vec{\jmath}(\vec{x},t) &:= \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(\vec{x},t)\vec{\nabla}\psi(\vec{x},t) - \psi(\vec{x},t)\vec{\nabla}\psi^*(\vec{x},t)\right]
\end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung!

10) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\,\rho(\vec{x},t) = const.$$

11) a) Zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{\jmath}(\vec{x},t)$ folgendes gilt:

$$\vec{\jmath}(\vec{x},t) = \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\left(\psi^*(\vec{x},t)\vec{P}\psi(\vec{x},t)\right)\,.$$

Der Impulsoperator $\vec{P}$ ist hier durch

$$\vec{P} := -i\hbar\vec{\nabla}$$

gegeben.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte für

$$\psi(\vec{x},t) = e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \quad \text{(ebene Wellen)}$$

an, indem Sie den Ausdruck für $\vec{\jmath}(\vec{x},t)$ aus Aufgabenteil a) verwenden. Erläutern Sie kurz das Problem der Normierbarkeit ebener Wellen.

12) Gegeben ist die eindimensionale Wellenfunktion $\psi(x,t)$ eines Teilchens. Die Wahrscheinlichkeit P, ein stabiles Teilchen irgendwo aufzufinden, ist

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx \, .$$

Mit Hilfe der zeitabhängige Schrödingergleichung kann gezeigt werden, dass diese zeitlich konstant ist:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx = 0 \ .$$

Falls das Teilchen instabil ist, d.h. zerfällt, soll die Wahrscheinlichkeit hingegen *nicht* zeitlich konstant bleiben. Das kann durch Verwendung eines komplexen Potentials erreicht werden:

$$V = V_0 - i\,\Gamma \,, \quad V_0, \Gamma \in \mathbb{R} \, .$$

a) Zeigen Sie, dass sich für die zeitabhängige Wahrscheinlichkeit $P(t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\frac{2\,\Gamma}{\hbar} \, P(t)$$

ergibt.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung nach $P(t)$ und bestimmen Sie die Lebensdauer des Teilchens in Abhängigkeit von Γ.

Hinweis: Als Lebensdauer wird die Zeitspanne bezeichnet, in der die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen aufzufinden, auf $1/e$ gesunken ist.