41. Die Multiplikation der Lagrange Funktion mit einem beliebigen konstanten Faktor ändert die Bewegungsgleichungen nicht (warum?). Betrachten Sie die Transformationen

$$\vec{x}_a \longrightarrow \vec{x}'_a = \alpha\, \vec{x}_a, \quad t \longrightarrow t' = \beta\, t$$

Sei ein Potential $U(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$ vorliegend, das

$$U(\vec{x}'_1, \ldots, \vec{x}'_N) = \alpha^k\, U(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$$

erfüllt. Welche k-Werte treten z. B. beim harmonischen Oszillator sowie beim Kepler Problem auf? Bestimmen Sie β derart, dass die Lagrangefunktion der gestrichenen Variablen bis auf einen konstanten Faktor mit der Lagrangefunktion der ungestrichenen Variablen übereinstimmt.

42. Vergleichen Sie für das vorige Beispiel Zeiten t, Längen l, Geschwindigkeiten v, Energien E, Drehimpulse L und beweisen Sie

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2}, \quad \frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}, \quad \frac{L'}{L} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+k/2}$$

Zeigen Sie damit für den harmonischen Oszillator, dass Perioden von den Amplituden unabhängig sind, sowie leiten Sie für das Kepler Problem das 3. Keplersche Gesetz her.

43. Betrachten Sie ein Teilchen in einem konstanten Gravitationsfeld und studieren Sie seine eindimensionale Bewegung entlang der x_3-Achse

$$L(x_3, \dot{x}_3) = \frac{1}{2} m \dot{x}_3^{\,2} - m g x_3$$

Zeigen Sie, dass eine konstante x_3-Verschiebung eine Symmetrietransformation der Lagrangefunktion darstellt und berechnen Sie mittels des Noether - Theorems die zugeordnete Erhaltungsgröße; was ist Ihre Bedeutung?

44. Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes auf einer Kugeloberfläche vom Radius R. Er befindet sich anfänglich im höchsten Punkt der Kugel und werde losgelassen. Betrachten Sie das System zweidimensional $\longrightarrow$ Bewegung auf einem Kreis, verwenden Sie Polarkoordinaten. Berechnen Sie die Zwangskraft $\vec{Z}$.

45. Im Laufe der Bewegung des Massenpunktes (siehe vorangegangenes Beispiel) nimmt die Gewichtskomponente auf die Oberfläche ab, die Zentrifugalkraft aber zu. Wo springt der Massenpunkt von der Oberfläche der Kugel ab?
Hinweis: Die Absprungbedingung ist durch $\vec{Z} = \vec{0}$ gegeben. Verwenden Sie den Energiesatz zur Vereinfachung der Absprungbedingung, d.h. zur einfachen Berechnung des Absprungwinkels.