36. Häufig ist die Lagrangefunktion nicht explizit zeitabhängig. Beweisen Sie, dass in diesem Fall

$$L - \dot{x}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = const.$$

gilt.

37. Beweisen Sie, dass die Kurve mit kürzestem Abstand zwischen zwei Punkten im $\mathbf{R}^2$ wie auch im $\mathbf{R}^3$ eine Gerade ist.

38. Gegeben sei die Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens unter Einfluss eines veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldes

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - q\,\Phi(\vec{x}, t) + q\,\dot{\vec{x}}\,\vec{A}(\vec{x}, t)$$

Dabei soll q die elektrische Ladung des Teilchens sein. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und vergleichen Sie den Ausdruck mit der Lorentzkraft

$$\vec{F} = q\,\left(\vec{E}(\vec{x}, t) + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}(\vec{x}, t)\right)$$

Drücken Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x}, t)$ sowie das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{x}, t)$ durch die beiden Funktionen $\Phi(\vec{x}, t)$ und $\vec{A}(\vec{x}, t)$ aus.

39. Auf welcher Kurve muss sich ein Teilchen im homogenen Schwerefeld bewegen, damit die Fallzeit zwischen zwei gegebenen Punkten $(x_1, 0)$ und (x_2, y_2) ein Minimum ist?
Hinweis: $T = \int \frac{ds}{v}$ sowie Energieerhaltung $\frac{1}{2}m\,v^2 = mgy$

40. Ein Teilchen habe die Lagrange Funktion

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -m\,c^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}$$

Ermitteln Sie die Lagrange Gleichungen und deren Lösungen. Wie lauten die verallgemeinerten Impulse?