1. Bilden folgende Mengen einen Vektorraum?

   - $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$
   - alle reellen Polynome $p_n(x)$ vom Grad ≤ 2

   Definieren Sie Addition und Skalarmultiplikation.

2. Folgern Sie aus den Vektorraumaxiomen:

   - Es gibt nur einen Nullvektor $\vec{0}$.
   - Das Inverse $-\vec{w}$ eines Vektors $\vec{w}$ ist eindeutig.
   - $(-1) \cdot \vec{w} = -\vec{w}$

3. Folgern Sie aus den Axiomen des affinen Raumes:

   - $\vec{PP} = \vec{0}$
   - $\vec{QP} = -\vec{PQ}$

4. Zeigen Sie, daß $\quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$

5. Zeigen Sie, daß $\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$

6. Berechnen Sie zunächst die allgemeine Lösung von

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

und fertigen Sie eine Skizze der Schar der Lösungskurven an. Lösen Sie die Differentialgleichung einerseits für $x(0) = 1$, andererseits für $x(1) = 0$. Sind die Lösungen eindeutig?

7. Betrachten Sie die gedämpfte Schwingung

$$\ddot{x} + 2\,\dot{x} + 2\,x = 0$$

Bestimmen Sie die Lösung für $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$ und machen Sie die Probe!

8. Lösen Sie mittels "Variation der Konstanten"

$$\dot{x} \,+\, 2x \,=\, -t,$$

wo $x(0) = 1$ gelten soll.

9. Lösen Sie für $c \neq 1$

$$\ddot{x} + x = cos\,ct, \quad \text{wo} \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Diskutieren Sie den Effekt der Resonanz $c \to 1$.

10. Zeigen Sie im $\mathbf{R}^3$, dass $rot\,\frac{\vec{x}}{r^n} \,=\, \vec{0}$, sowie $\triangle\,\frac{1}{r} \,=\, 0$ (es sei immer $r \neq 0$) .