Übungen zu T2, SS 2009, Blatt 4

18) Die Spin Observable ist gegeben durch $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}$, wobei $\vec{\sigma}$ als Komponenten die sogenannten Pauli-Matrizen enthält.

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_\mathrm{x} \\ \sigma_\mathrm{y} \\ \sigma_\mathrm{z} \end{pmatrix} \; , \; \sigma_\mathrm{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sigma_\mathrm{y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; , \; \sigma_\mathrm{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Diagonalisieren Sie σ_z, d.h. finden Sie die Eigenwerte $\lambda_\pm$ und die normierten (auf 1) Eigenvektoren $|\pm\rangle$, sodass

$$\sigma_\mathrm{z}\,|\pm\rangle = \lambda_\pm\,|\pm\rangle$$

b) Zeigen Sie, dass σ_x und σ_y die selben Eigenwerte haben. Gilt dies auch für die Eigenvektoren?

19) Berechnen Sie die Unschärferelationen für die Operatorpaare $(\sigma_\mathrm{x}, \sigma_\mathrm{y})$, $(\sigma_\mathrm{x}, \sigma_\mathrm{z})$ und $(\sigma_\mathrm{y}, \sigma_\mathrm{z})$.

20) Ein geladenes Spin $\frac{1}{2}$ - Teilchen der Masse m und Ladung q in einem homogenen Magnetfeld

$$\vec{B} = B\,\vec{e}_\mathrm{z} \quad , \; |\vec{e}_\mathrm{z}| = 1$$

wird durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{q\hbar}{2m}\,B\,\sigma_\mathrm{z}$$

beschrieben. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand gegeben durch

$$|\,\psi(0)\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Zustands $|\,\psi(t)\,\rangle$

Hinweis: Benutzen Sie den Spektralsatz für Funktionen von Operatoren

$$f(A) = \sum_j f(\lambda_\mathrm{j})\,|\,j\,\rangle\,\langle\,j\,| \;.$$

um den Zeittranslationsoperator $e^{-iHt/\hbar}$ als Linearkombination von Projektoren auf die Eigenzustände von σ_z darzustellen und drücken Sie den Anfangszustand ebenfalls durch Eigenfunktionen von σ_z aus.

21) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren σ_{x}, σ_{y} und σ_{z} für den Zustand $|\,\psi(t)\,\rangle$ aus Beispiel 20 und betrachten Sie diese zu den Zeiten $t = 0$ und $t = \frac{\pi\, m}{q\, B}$.

22) Ein Spin $\frac{1}{2}$ - Teilchen befinde sich in dem Spin-Zustand

$$|\,\phi\,\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 + i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in den Spin-Zuständen

$$|\uparrow\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad |\downarrow\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu messen?

23) Statistische Gemische von Zuständen werden durch positive ($\rho \geq 0$), hermitesche ($\rho^\dagger = \rho$), normierte ($Spur(\rho) = 1$) Operatoren ρ, sogenannte Dichtematrizen, beschrieben. Stellen Sie fest, ob

a) $\rho \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $\rho \;=\; \frac{1}{2}\,(\,\mathbb{1}_2 + \vec{a}\,\vec{\sigma}\,)$, mit $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{a}| \leq 1$, Dichtematrizen sind.

24) Ein Spin $\frac{1}{2}$ Zustand ist durch eine (2×2) Dichtematrix mit den Eigenschaften aus Beispiel 23 gegeben. Der Erwartungswert einer Observablen ist dann gegeben durch

$$\langle\, A\,\rangle \;=\; Spur(A\,\rho).$$

Es seien nun 3 Observablen A,B und C gegeben durch

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;,\; B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \;,\; C \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

In einem unbekannten Zustand werden die Erwartungswerte

$$\langle\, A\,\rangle \;=\; 2 \;,\; \langle\, B\,\rangle \;=\; \frac{1}{2} \;,\; \langle\, C\,\rangle \;=\; 0$$

gemessen, bestimmen Sie die Dichtematrix des unbekannten Zustands.