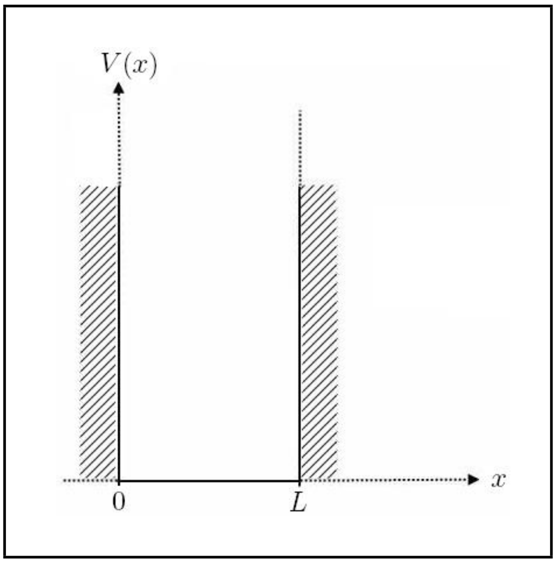
Übungen zu T2, SS 2009, Blatt 3

12) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m in einem unendlichen Potentialtopf, gegeben durch das Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, L] \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$



Hinweis: Nutzen Sie die Stetigkeitsbedingung $\psi(0) = \psi(L) = 0$ sowie die Normierung der Wellenfunktion aus um die Eigenfunktionen $\psi_\mathrm{n}(x)$ und Energien E_n zu bestimmmen.

13) Berechnen Sie die entsprechenden Impulsraumverteilungen $\tilde{\psi}_\mathrm{n}(p)$ der Zustände aus Aufgabe 12.

Hinweis: Die Fouriertransformation ist hier gegeben durch

$$\tilde{\psi}_\mathrm{n}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_\mathrm{n}(x)\, e^{-ipx/\hbar}$$

Drücken Sie das Ergebnis durch die Funktionen $F(p \mp \frac{n\pi\hbar}{L})$ aus, wobei $F(p) = \frac{2\hbar}{pL} \sin(\frac{pL}{2\hbar})$ ist.

14) Berechnen Sie den Erwartungswert des Impulses für die Eigenzustände des unendlichen Potentialtopfs.

$$\langle\, P \,\rangle_{\mathrm{n}} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dp\, p\, |\tilde{\psi}_{\mathrm{n}}(p)|^2$$

Hinweis: Beachten Sie die (Anti-)Symmetrie der Impulszustände $\tilde{\psi}_{\mathrm{n}}(p)$ für gerade und ungerade n. Was lässt sich somit über $|\tilde{\psi}_{\mathrm{n}}(p)|^2$ sagen?

15) Berechnen Sie $\langle\, P^2 \,\rangle_{\mathrm{n}}$ sowie

$$\Delta\, P_{\mathrm{n}} \;=\; \sqrt{\langle\, P^2 \,\rangle_{\mathrm{n}} \;-\; \langle\, P \,\rangle_{\mathrm{n}}^2}$$

16) Diskutieren Sie graphisch die Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum, $|\tilde{\psi}_{\mathrm{n}}(p)|^2$, für die Fälle $n = 1$, $n = 2$ und $n \gg 1$.

17) Betrachten Sie nun die Zeitentwicklung des Zustands im unendlichen Potentialtopf, welcher zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die Superposition

$$\psi(0) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,\psi_1(x) \;+\; \psi_2(x)\,)$$

gegeben ist, wobei $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ der Grundzustand bzw. erste angeregte Zustand des unendlichen Potentialtopfs (die Lösungen von Beispiel 12) sind. Betrachten Sie dazu graphisch die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ zu verschiedenen (geeigneten) Zeiten.