Übungen zu T2, SS 2009, Blatt 2

7) Betrachten Sie die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem Doppel-δ-Potential

$$V(x) \;=\; -\,V_0\,\delta(x\,+\,x_0)\;-\;V_0\,\delta(x\,-\,x_0)\quad,\ \text{mit}\ V_0\,>\,0$$

und finden Sie die Differentialgleichungen 1.Ordnung, welche die Wellenfunktion in einer kleinen Umgebung von $+x_0$ bzw. $-x_0$ erfüllen muss.

Hinweis: Integrieren Sie die eindimensionale Schrödingergleichung über kleine Intervalle $\pm\,\epsilon$ um die beiden δ-Potentiale und lassen Sie diese Intervalle schließlich immer näher zusammenrücken. Da die Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsamplitude interpretierbar sein soll, können Sie annehmen, dass diese überall stetig und insbesondere endlich bleibt und daher gilt:

$$\int\limits_{\pm x_0-\epsilon}^{\pm x_0+\epsilon} dx\,\psi(x)\;=\;0$$

8) Teilen Sie die x-Achse in 3 Gebiete I, II und III ein, sodass

$$\begin{array}{rccccc} \mathrm{I}: & -\infty & < & x & < & -x_0 \\ \mathrm{II}: & -x_0 & < & x & < & x_0 \\ \mathrm{III}: & x_0 & < & x & < & \infty \end{array}$$

und finden Sie sowohl die geraden Lösungen $\psi_+(x)$, als auch die ungeraden Lösungen $\psi_-(x)$, der Schrödingergleichung für diese 3 Bereiche.

Hinweis: Verwenden Sie Exponential-Ansätze, gewichtet mit positiven Konstanten $\alpha_\pm$ für die geraden bzw. ungeraden Lösungen und beachten Sie das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion ($\psi(\pm\infty) = 0$) sowie die Stetigkeit der Wellenfunktion an den Grenzen der Bereiche.

9) Berechnen Sie die Konstanten $\alpha_\pm$, indem Sie die Normierung der Wellenfunktion ausnutzen

$$1 \stackrel{!}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi_\pm(x)|^2$$

und geben Sie somit die Wellenfunktion für die gesamte x-Achse (möglichst kompakt) an.

10) Bilden Sie die (ersten) Ableitungen der Teillösungen zweier benachbarter Gebiete aus Beispiel 8 & 9 und verwenden Sie diese in der entsprechenden Gleichung aus Beispiel 1 um damit aus der Unstetigkeit der Ableitung eine (transzendente) Gleichung für die möglichen Energien zu gewinnen. Diskutieren Sie diese Gleichung graphisch.

    Hinweis: Die transzendente Gleichung ist von der Form

$$f(\kappa) \;=\; \pm\, e^{-2\kappa\, x_0} \quad ,$$

    betrachten Sie beide Seiten dieser Gleichung separat voneinander, aber in einem Koordinatensystem, um graphisch auf die Anzahl der möglichen Lösungen zu schließen.

11) Beschreiben Sie, warum das Doppel-δ-Potential als Modell für ein zweiatomiges ionisiertes Molekül dienen kann, bei dem der Abstand der Kerne gerade $2x_0$ beträgt. Wie werden die Energien der Bindungszustände von den Grenzübergängen $x_0 \;\to\; \infty$ und $x_0 \;\to\; 0$ beeinflusst. Wie sieht das Potential bei Berücksichtigung der Abstoßung der Kerne aus.