Quantenmechanik II

SS 2009 **7. Aufgabenblatt**

32. Zeige, dass die Energie des (klassischen) elektromagnetischen Feldes in einem Kasten Λ,

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_\Lambda (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3x,$$

als

$$W = \frac{V}{2\pi c^2}\sum_{\mathbf{k},\lambda} \omega(\mathbf{k})^2 A_{\mathbf{k},\lambda} A^*_{\mathbf{k},\lambda}$$

geschrieben werden kann, wo V das Volumen von Λ, $\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{c}|\mathbf{k}|$ und $A_{\mathbf{k},\lambda}$ die Fourierkoeffizienten des Vektorpotentials mit Polarisation λ sind.

33. Zeige, dass die Bewegungsgleichungen für $A_{\mathbf{k},\lambda}$ in der Hamiltonschen Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_{\mathbf{k},\lambda} &= -\frac{\partial W}{\partial Q_{\mathbf{k},\lambda}} \\ \frac{d}{dt}Q_{\mathbf{k},\lambda} &= \frac{\partial W}{\partial P_{\mathbf{k},\lambda}} \end{aligned}$$

geschrieben werden können. (Notation wie in der Vorlesung.)

34. Zeige, dass der Wechselwirkungsoperator

$$-\frac{\hbar q}{imc}\int_\Lambda \Psi(x)^* \mathbf{A}(x)\cdot\nabla\Psi(x) d^3x$$

auf dem Raum $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{rad}}$, wo $\mathcal{H}_1$ der Raum der 1-Elektronenzustände ist, die Form

$$-\sum_{\mathbf{k},\lambda}\frac{q}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega(\mathbf{k})}}(\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}\cdot\mathbf{P})\left\{a_{\mathbf{k},\lambda}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}} + a^*_{\mathbf{k},\lambda}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}\right\}$$

hat.

35. Betrachte eine zeitabhängige Störung der Form

$$W(t) = \begin{cases} W\cos\omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

Begründe die goldene Regel von Fermi:

$$w^{(1)}_{i\to\alpha} = \frac{2\pi}{\hbar}|W_{if}|^2\rho_\alpha(E_f)$$

mit $E_f = E_i \pm \hbar\omega$. (Notation wie in der Vorlesung.) Diskutiere auch den Gültigkeitsbereich dieser Näherung.

36. Ein Elektron befindet sich für $t \leq 0$ in dem Grundzustand eines dreidimensionalen Potentialtopfes mit Radius a und von der Tiefe V_0. Berechne die Ionisierungsrate für $t > 0$ in einem räumlich homogenen elektrischen Feld $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos\omega t$.

37. Es sei angenommen, dass

$$\Omega_{\text{ex}}\psi := \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH/\hbar}e^{-itH_0/\hbar}\psi$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}$ existiert. Zeige, dass

(i) $\Omega_{\text{ex}}\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ex}}$

(ii) $\Omega_{\text{ex}}^* = \hat{\Omega}_{\text{ex}}$

(iii) $\Omega_{\text{ex}}^*\Omega_{\text{ex}} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}},\ \ \Omega_{\text{ex}}\Omega_{\text{ex}}^* = E_{\text{ex}}$

(iv) $H\Omega_{\text{ex}} = \Omega_{\text{ex}}H_0,\ H_0\hat{\Omega}_{\text{ex}} = \hat{\Omega}_{\text{ex}}H.$

38. Es sei wieder angenommen, dass Ω_{ex} auf ganz $\mathcal{H}$ existiert. Zeige, dass folgende Bedingunen äquivalent sind:

(i) $S_I = \Omega_{\text{aus}}^*\Omega_{\text{ein}}$ ist unitär.

(ii) $\mathcal{H}_{\text{ein}} = \mathcal{H}_{\text{aus}}$.