Quantenmechanik II

SS 2009 **5. Aufgabenblatt**

22. Betrachte den anharmonischen, eindimensionalen Oszillator mit Hamiltonoperator

$$H(\lambda) = \frac{\omega}{2}(P^2 + X^2) + \lambda X^4$$

mit $\lambda \geq 0$. Man bestimme durch den Variationsansatz

$$\psi(x) = (\text{const.})\ e^{-\alpha x^2}$$

eine obere Schranke für die Grundzustandsenergie und vergleiche mit Aufgabe 20.

23. Betrachte wieder den anharmonischen Oszillator aus Aufgabe 20.
Seien $|0\rangle$ und $|2\rangle$ die Eigenvektoren von $H_0 = \frac{\omega}{2}(P^2 + X^2)$ mit Eigenwerten $\frac{1}{2}\omega$ und $\frac{5}{2}\omega$. Finde eine obere Schranke für die Grundzustandsenergie von $H(\lambda)$ durch Variation mit Testvektoren der Form $\alpha|0\rangle + \beta|2\rangle$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. [Hinweis: Betrachte die 2×2 Matrix $\langle n|H(\lambda)|m\rangle$, $n, m = 0, 2$.]

24. Benutze die Templesche Ungleichung, um eine untere Schranke für die Grundzustandsenergie von

$$H = P^2 + X^2 + 0,2\, X^4$$

zu finden. Vergleiche mit den oberen Schranken nach den Aufgaben 22 und 23.

25. Berechne die Grundzustandsenergie des He-Atoms mit Hamiltonoperator

$$H = \sum_{i=1}^{2} \left(-\frac{1}{2}\nabla_i^2 - \frac{1}{|\mathbf{x}_i|} \right) + \frac{\lambda}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}$$

in erster Ordnung Störungstheorie in λ. [Hinweis: Die Grundzustandswellenfunktion von $-(1/2)\nabla^2 - 1/|\mathbf{x}|$ ist $\pi^{-3/4}\exp(-|\mathbf{x}|)$ mit Eigenwert $-1/2$. Bei der Integration empfielt es sich, Kugelkoordinaten mit der $\mathbf{x}_1$-Rictung als Polachse einzuführen. Nur Mut, die Integrale sind lösbar!]

26. Berechne eine untere Schranke für die Grundzustandsenergie des He-Atoms mit Hilfe der Projektionsmethode.