# Quantenmechanik II

**SS 2009** **3. Aufgabenblatt**

**12.** Sei $T$ die in der Vorlesung definierte Zeitspiegelung auf $L_2(\mathbf{R}^3)$. Sei $H$ ein unter $T$ invarianter Operator. Zeige, daß die Eigenfunktionen von $H$ reell gewählt werden können.
Zusatzfrage: Man gebe das Beispiel eines Hamiltonoperators an, welcher diese Bedingung nicht erfüllt.

**13.** Berechne die Matrix in $SU(2)$, welche einer Drehung um den Winkel $\theta$ um die $x$-Achse entspricht.

**14.** In dieser Aufgabe soll das gemeinsame Spektrum von $\vec{J}^2$ und $J_3$ bestimmt werden.
Sei $|j,m\rangle$ ein gemeinsamer Eigenvektor von $\vec{J}^2$ und $J_3$ zu Eigenwerten $\hbar^2 j(j+1)$ bzw. $\hbar m$, wobei zunächst nur bekannt ist, dass $j, m \in \mathbb{R}$.
(i) Mit $J_\pm := J_1 \pm iJ_2$, zeige dass $J_\pm|j,m\rangle$ ein Eigenvektor von $\vec{J}^2$ bzw. $J_3$ zu Eigenwerten $\hbar^2 j(j+1)$ bzw. $\hbar(m \pm 1)$ ist, es sei denn $J_\pm|j,m\rangle = 0$
(ii) Zeige, dass $j$ und $m$ nur die Werte $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$, $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$ annehmen kann.

**15.** Betrachte ein kombiniertes System von zwei Teilchen mit Drehimpuls-Quantenzahlen $j_1 = 2$, $m_1 = 1$, $j_2 = 1/2$, $m_2 = 1/2$. Berechne die Wahrscheinlichkeit, für das Gesamtsystem die Quantenzahlen $j, m$ zu messen.

**16.** Der Hamiltonoperator für die Spinfreiheitsgrade von Positronium im Magnetfeld in $z$-Richtung ist

$$H = a\,\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + b(\sigma_{1z} - \sigma_{2z})$$

wo $a$ und $b$ Konstanten sind und $\vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma} \otimes 1$, $\vec{\sigma}_2 = 1 \otimes \vec{\sigma}$, wo $\vec{\sigma}$ der Vektor der Pauli-Matrizen ist. Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von $H$.
(Hinweis: Drücke zuerst $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ durch $(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)^2$, $\vec{\sigma}_1^2$ und $\vec{\sigma}_2^2$ aus.)