22. Beweisen Sie die Eindeutigkeit der Lösung der Poissongleichung für eine Dirichlet Randbedingung auf der Oberfläche O des betrachteten Gebiets V. Zeigen Sie weiters, dass für die Laplace- und Poissongleichung im Falle von Neumannschen Randbedingungen Eindeutigkeit bis auf eine Konstante vorliegt.

23. Lösen Sie die Laplace Gleichung für das Innere eines am Ursprung zentrieren, und in x_3-Richtung weisenden Zylinders von Radius 1 und Höhe $L = 1$. Auf der Deckel- und Bodenfläche sei $\Phi = 0$, auf dem seitlichen Zylindermantel sei $\Phi(1, \phi, z) = \sin(\phi)\sin(2\pi z)$ vorgegeben.

Hinweis: Verwenden Sie beim Produktansatz in Zylinderkoordinaten Separationskonstanten mit solchen Vorzeichen, dass der $Z(z)$- Anteil eine Sinusfunktion ergibt (warum ?). Die radiale Gleichung hat die komplex fortgesetzte Besselfunktion $J_n(ix)$ als Lösung.

24. Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n, \text{ falls } x \in I_n := [\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}] \\ 0, \text{ falls } x \in [0,1] \backslash I_n \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion $f = 0$ konvergiert.

(ii) Finden Sie eine (möglichst einfache) Majorante G zu f_n, d.h. eine Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ so dass für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$: $f_n(x) \leq G(x)$ gilt.

(iii) Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz?

25. Sei die Funktion $f(x) \geq 0$ so dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Zeigen Sie mittels Testfunktion und dem dominierten Konvergenz Satz, dass

$$\lim_{n\to\infty} nf(nx) = \delta$$

wo δ die Dirac'sche Deltafunktion ist.

26. In dem Hilbertraum

$$\mathcal{H}_L := \{\text{Funktionen } \psi : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ so dass } \psi(0) = \psi(L)\}$$

sei der linearere Operator $K : \mathcal{H}_L \to \mathcal{H}_L$ durch

$$K\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x),\ \psi \in \mathcal{H}_L$$

definiert. Zeigen Sie, dass der kinetische Operator K hermitesch ist. Ist K beschränkt ? Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von K. Hierbei ist m die Masse eines Teilchens, und $\hbar^2$ das Planck´sche Wirkungsquantum.

Hinweis: Jede Funktion $\psi \in \mathcal{H}_L$ kann sehen werden, als eine L-periodishe Funktion. Das Scalar product ist

$$(\psi, \varphi) := \int_0^L \psi^*(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$