8. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(xy'(x))' - \frac{n^2}{x} y(x) + \lambda x y(x) = 0,\ x \in [0,1],\ y(1) = 0,\ y(0) < \infty.$$

Zeigen Sie, dass mittels $\xi = \sqrt{\lambda} x$ und $J(\xi) := y(x(\xi))$ folgt:

$$\xi^2 J''(\xi) + \xi J'(\xi) + \left(\xi^2 - n^2\right) J(\xi) = 0,\ J(\sqrt{\lambda}) = 0,\ J(0) < \infty.$$

9. Zeigen Sie, dass

- $\left\{\frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right), \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi k x}{L}\right)\right\}$, $k \in \mathcal{N}$ bezüglich der Integration über $[0, L]$ ein Orthonormalsystem bilden.
- $\left\{\frac{1}{\sqrt{L}} \exp\left(\frac{2\pi i k x}{L}\right)\right\}$, $k \in \mathcal{Z}$ bezüglich einer geeigneten (welcher?) Integration über $[0, L]$ ein Orthonormalsystem bilden.

10. Berechne die komplexe Fourier-Reihe der $L-$periodischen Exponentialfunktion, die definiert ist durch:

$$f(x) = e^x - 1 \text{ für } x \in [0, L)$$

Vereinfache das Ergebnis soweit wie möglich.

11. Berechnen Sie die Fouriertransformation von $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Hinweis: Ergänzen Sie auf ein vollständiges Quadrat und lösen Sie die Integration im Komplexen mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes!

12. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{g}$ von

$$g(x) := (h * f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) h(y) \, \mathrm{d}y.$$

als Funktion von den Fouriertransformatierten $\hat{f}$ und $\hat{h}$.

13. In der Quantenmechanik ist die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + V(x) \psi(x)$$

von zentraler Bedeutung. Hierbei ist E die Energie und m die Masse des Teilchens, und $\hbar^2$ das Planck´sche Wirkungsquantum. Die Funktion V beschreibt das Potenzial, in dem sich das Teilchen bewegt; hier können Sie annehmen, dass die Fouriertransformierte $\hat{V}$ von V existiert.
Welcher Gleichung genügen die Fouriertransformierten $\hat{\psi}$ und $\hat{V}$, wenn die Wellenfunktion ψ die Schrödingergleichung erfüllt?

14. Berechne die Lösung y folgender Differentialgleichung mittels Laplace–Transformation:

$$2y' + 4y = x,\ y(0) = 0.$$