Übungen zu T2, SS 2008, Blatt 1

1) Berechnen Sie die Anzahl der Schwingungsmoden dN mit (Kreis)Frequenzen im Intervall $[\omega, \omega + d\omega]$ in einem hohlen Würfel mit reflektierenden Wänden und Kantenlänge L.

   Hinweis: Die Schwingungsmoden entsprechen stehenden elektromagnetischen Wellen, die sich durch Wellenzahlvektor $\vec{k}$ und 2 Polarisationsrichtungen unterscheiden. Es gilt $\omega = c|\vec{k}|$ und

$$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z; \quad k_i = \frac{\pi}{L} n_i \quad (i = x, y, z),\ n_i \in \mathbb{N}\,.$$

   Die Anzahl der Wellen kann durch Berechnung des entsprechenden Volumens (Oberfläche $\times$ Schichtdicke) im Raum der Parameter n_i bestimmt werden.

2) a) Berechnen Sie die Energiedichte

$$u(\omega, T) = \frac{1}{V} \frac{dE}{d\omega}$$

   (V = Volumen des Hohlraums, dE = Energie im Intervall $[\omega, \omega + d\omega]$) der Hohlraumstrahlung auf *klassischem* Weg, d. h. verwenden Sie

$$dE = kT\, dN$$

   (k = Boltzmannfaktor, T = Temperatur).

   b) Erläutern Sie, warum in obiger Formel die Energie eines Oszillators durch kT gegeben ist.

3) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung (für die Energie der Photonen einer Mode der Frequenz ω) eines Systems im Gleichgewicht mit Temperatur T ist gegeben durch

$$P(E) = \frac{e^{-E/kT}}{\sum_E e^{-E/kT}}\,.$$

   Hier sind E mögliche Energiewerte, es gilt $E = n\hbar\omega,\ n \in \mathbb{N}$.

   a) Berechnen Sie aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(E)$ die mittlere Energie gemäß

$$\bar{E} = \sum_E E\, P(E)\,.$$

   Hinweis: Benützen Sie $ne^{-nx} = -\frac{d}{dx} e^{-nx}$, $\frac{d/dx f(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx} \ln f(x)$ und $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

b) Bestimmen Sie die Energiedichte $u(\omega, T) = \frac{1}{V}\frac{dE}{d\omega}$ unter Verwendung von $dE = \bar{E} dN$.

4) Wie lauten die Grenzfälle für sehr kleine (Raleigh-Jeans Gesetz) und sehr große (Wien'sches Gesetz) Frequenzen ω des Planck'schen Strahlungsgesetzes für die Energiedichte

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Übungen zu T2, SS 2008, Blatt 2

5) Bestimmen Sie das Planck'sche Strahlungsgesetz $u(\lambda, T)$ in Abhängigkeit der Wellenlänge λ und der Temperatur.

   Hinweis: Da das Strahlungsgesetz über Frequenzdifferenzen $d\omega$ hergeleitet wurde, ist ist $u(\omega, T)$ (siehe Bsp. 4) mit $d\omega$ zu multiplizieren und ω durch λ auszudrücken.

6) Finden Sie die Wellenlänge λ_{max}, für die $u(\lambda, T)$ den maximalen Wert annimmt, und zeigen Sie somit, dass

$$\lambda_{\text{max}} T = const. \quad \text{(Wien'sches Verschiebungsgesetz)}$$

   gilt; d.h. bestimmen Sie die Konstante.

   Hinweis: Zur Bestimmung des Maximums stößt man auf die Gleichung $5\,(1 - e^{-x}) = x$. Lösen Sie diese numerisch (z.B. durch Iteration).

7) a) Näherungsweise kann die Sonne als schwarzer Strahler betrachtet werden. Schätzen Sie die Oberflächentemperatur der Sonne mit Hilfe des Wien'schen Verschiebungsgesetzes

$$\lambda_{\text{max}} T \simeq 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$$

   ab, wobei $\lambda_{\text{max}} \simeq 500$ nm.

   b) Die Strahlungsleistung, die pro Flächeneinheit die Erde (noch vor der Atmosphäre) erreicht, wird Solarkonstante genannt und beträgt etwa 1.4 kW m^{-2}. Schätzen Sie die Anzahl der pro Flächen- und Zeiteinheit ankommenden Photonen ab.

8) a) Berechnen Sie die gesamte Strahlungsleistung P_{ges} der Sonne (Sonnenradius $r_s \simeq 6.961 \cdot 10^8$ m, $T = 5800$ K) mit Hilfe des Stefan-Boltzmann-Gesetzes (welches die abgestrahlte Leistung *pro Flächeneinheit* angibt)

$$P_{Fl} = \sigma\, T^4\,, \quad \sigma \simeq 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}\,.$$

   b) Wie groß ist die Leistung pro Flächeneinheit der auf der Erde eintreffenden Strahlung (vor der Atmosphäre), wenn der Radius der Erdumlaufbahn etwa $1.5 \cdot 10^{11}$ m beträgt?

9) a) Geben Sie den Bereich der Photonenenergien des sichtbaren Lichtes in Elektronvolt (eV) an (Wellenlängenbereich: 360 nm bis 780 nm). Vergleichen Sie das Resultat mit der Ionisierungsenergie des Wasserstoffatoms.

   Hinweis: Sie können z.B. $\hbar c = 197$ eV nm verwenden.

   b) Welche Energien (in eV) müssen Photonen besitzen, um atomare Abstände von 10^{-10} (Kristallstrukturen) auflösen zu können?

   Können Bakterien ($\approx 10^{-6}$ m) mit einem Mikroskop, das mit sichtbarem Licht arbeitet, beobachtet werden?

Übungen zu T2, SS 2008, Blatt 3

10) Betrachten Sie die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho(\vec{x},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{\jmath}(\vec{x},t) = 0\,. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass diese erfüllt ist, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\vec{x},t)$ und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{\jmath}(\vec{x},t)$ folgendermaßen definiert wird:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x},t) &:= \psi^*(\vec{x},t)\,\psi(\vec{x},t) \\ \vec{\jmath}(\vec{x},t) &:= \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(\vec{x},t)\vec{\nabla}\psi(\vec{x},t) - \left(\vec{\nabla}\psi^*(\vec{x},t)\right)\psi(\vec{x},t)\right] \end{aligned} \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung (welche die zeitliche Änderung der Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ beschreibt)!

11) Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x\,\rho(\vec{x},t) = const.$$

Hinweis: Gehen Sie zunächst von dem Ausdruck

$$\frac{d}{dt}\int_V d^3x\,\rho(\vec{x},t)$$

für ein *endliches* Gebiet V aus und verwenden Sie die Kontinuitätsgleichung (1) sowie den Gauß'schen Integralsatz. Beachten Sie außerdem, dass $\psi(\vec{x},t)$ für wachsende Abstände $r := |\vec{x}|$ aufgrund der Normierbarkeit schneller als $\frac{1}{r}$ abfallen muss. Bilden Sie schließlich den Limes $V \to \mathbb{R}^3$ (d.h. $r \to \infty$).

12) a) Zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{\jmath}(\vec{x},t)$ (2) gilt:

$$\vec{\jmath}(\vec{x},t) = \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\left(\psi^*(\vec{x},t)\vec{P}\psi(\vec{x},t)\right)\,. \tag{3}$$

Der Impulsoperator $\vec{P}$ ist hier durch

$$\vec{P} := -i\hbar\vec{\nabla}$$

gegeben.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte für

$$\psi(\vec{x},t) = e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \quad \text{(ebene Wellen)}$$

unter Verwendung von Glg. (3) an.
Erläutern Sie kurz das Problem der Normierbarkeit ebener Wellen.

13) Gegeben ist die eindimensionale Wellenfunktion $\psi(x,t)$ eines Teilchens. Die Wahrscheinlichkeit P, ein stabiles Teilchen irgendwo aufzufinden, ist

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx \, .$$

Diese ist zeitlich konstant,

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, dx = 0 \, , \tag{4}$$

was durch Verwendung der zeitabhängigen Schrödingergleichung gezeigt werden kann.

Falls das Teilchen instabil ist, also zerfällt, soll die Wahrscheinlichkeit *nicht* zeitlich konstant bleiben. Das kann durch Verwendung eines komplexen Potentials erreicht werden:

$$V = V_0 + i\,\Gamma \, , \quad V_0, \Gamma \in \mathbb{R} \, .$$

a) Zeigen Sie, dass sich für die zeitabhängige Wahrscheinlichkeit $P(t)$ anstelle von Gleichung (4) die Differentialgleichung

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\frac{2\,\Gamma}{\hbar}\, P(t)$$

ergibt.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung nach $P(t)$ und bestimmen Sie die Lebensdauer des Teilchens in Abhängigkeit von Γ.

Hinweis: Als Lebensdauer wird die Zeitspanne bezeichnet, in der die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen aufzufinden, auf $1/e$ gesunken ist.

Übungen zu T2, SS 2008, Blatt 4

14) A, B seien zwei Operatoren, die auf Zustände $\psi(\vec{x}), \phi(\vec{x}) \in \mathcal{H}$ wirken.

a) Zeigen Sie, dass
$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \,.$$

b) $\langle A \rangle_\psi := \langle \psi | A\psi \rangle$ bezeichne den Erwartungswert des Operators A für den Zustand ψ.
Zeigen Sie
$$A = A^\dagger \Rightarrow \langle A \rangle_\psi \in \mathbb{R} \,.$$

c) Zeigen Sie
$$A = B^\dagger B \Rightarrow \langle A \rangle_\psi \geq 0 \,.$$

15) Beweisen Sie die folgenden Kommutatorrelationen:

a) $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$

b) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobi-Identität)

16) a) Zeigen Sie
$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + ... \text{ (Baker-Hausdorff Formel)}\,, \tag{1}$$
wobei
$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \,.$$

b) Beweisen Sie
$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}, \quad \text{für } [[A, B], A] = [[A, B], B] = 0 \,.$$

Hinweis: Differenzieren Sie die Funktion $f(\lambda) = e^{A\lambda} e^{B\lambda}$ nach λ, verwenden Sie die Baker-Hausdorff Formel (1), integrieren Sie danach die erhaltene Gleichung und setzen Sie letztlich $\lambda = 1$.

17) Zeigen Sie, dass der Ortsoperator X, der Impulsoperator P und der Hamiltonoperator H (mit *reellem* Potential $V(X)$) hermitesch sind (eindimensionaler Fall).

18) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Impulsoperators $\langle P\rangle_\psi := \langle\psi|P\psi\rangle$ gegeben ist durch

$$\langle P\rangle_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, p \left|\tilde{\psi}(p)\right|^2 ,$$

wenn der Zustand $\psi(x)$ durch das Wellenpaket

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \tilde{\psi}(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}px}$$

gegeben ist. *Hinweis*: Verwenden Sie die Dirac'sche Deltafunktion mit den Eigenschaften

$$\delta(p-p') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')x} \quad \text{und}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp'\, \delta(p-p') f(p') = f(p)\,.$$

Übungen zu T2, SS 2008, Blatt 5

19) Beweisen Sie die Schwarz'sche Ungleichung

$$\langle\psi|\psi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle \geq |\langle\psi|\varphi\rangle|^2 \ . \qquad (1)$$

Hinweis: Das Skalarprodukt des Vektors $|\Omega\rangle = |\psi\rangle + \lambda|\varphi\rangle$ mit sich selbst ist positiv: $\langle\Omega|\Omega\rangle \geq 0$. Setzen Sie $\lambda = -\langle\varphi|\psi\rangle/\langle\varphi|\varphi\rangle$.

20) Beweisen Sie die allgemeine Formulierung der Heisenberg'schen Unschärferelation für nicht kommutierende Observable A, B

$$\Delta A\,\Delta B \geq \frac{1}{2}\,|\langle[A,B]\rangle|$$

(wobei $(\Delta A)^2 := \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$), indem Sie die Schwarz'sche Ungleichung (1) mit Vektoren $|\psi\rangle = \bar{A}|\phi\rangle$ und $|\varphi\rangle = \bar{B}|\phi\rangle$ verwenden. Hier ist $\bar{A} := A - \langle A\rangle$ und $\bar{B} := B - \langle B\rangle$. Verwenden Sie für die weitere Abschätzung der Ungleichung die Zerlegung

$$\bar{A}\bar{B} = \frac{1}{2}\left[\bar{A},\bar{B}\right] + \frac{1}{2}\left\{\bar{A},\bar{B}\right\} \ ,$$

mit Antikommutator $\{\bar{A},\bar{B}\} = \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{A}$, welcher stets hermitesch ist.

21) Zeigen Sie, dass für das Gauß'sche Wellenpaket

$$\psi(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \qquad (2)$$

die Unschärferelation in Ort und Impuls minimal wird.

22) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle H\rangle$ der Energie des harmonischen Oszillators (hier ist $V = \frac{m\omega^2}{2}\,x^2$) für das Gauß'sche Wellenpaket (2).

Übungen zu T2, SS 2008, Blatt 6

23) Gegeben ist die Gaußfunktion im Impulsraum

$$\tilde{\psi}(p) = d\, e^{-\frac{\sigma^2 (p-p_0)^2}{2\hbar^2}} ,$$

mit einer geeigneten Normierungskonstante d.

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante d.

b) Berechnen Sie für $\tilde{\psi}(p)$ und den Impulsoperator P die Erwartungswerte $\langle P \rangle$ und $\langle P^2 \rangle$ (im Impulsraum).

24) Für einen stationären Zustand ist die Energie zeitlich konstant und genau bestimmt, d. h. $\Delta E = 0$. Betrachten wir allerdings eine Superposition von zwei stationären Zuständen,

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= c_1 \psi_1(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + c_2 \psi_2(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t}, \\ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ &\psi_1(x), \psi_2(x) \in \mathbb{R},\ \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0,\ E_2 > E_1, \end{aligned} \tag{1}$$

dann ist das im Allgemeinen nicht mehr der Fall.

Berechnen Sie $|\psi|^2$ und drücken Sie den Interferenzterm durch Winkelfunktionen aus.

25) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle H \rangle_\psi$, $\langle H^2 \rangle_\psi$ für ψ aus Glg. (1).

26) Berechnen Sie die Unschärferelation $\Delta E \Delta t$ für den Zustand ψ (Glg. (1)), wobei $(\Delta E)^2 = (\Delta H)^2 = \langle H^2 \rangle_\psi - \langle H \rangle_\psi^2$ und Δt gegeben ist durch

$$\Delta t = \tau = \frac{2\pi\hbar}{E_2 - E_1} \text{ (Oszillationsperiode).} \tag{2}$$

Bei welchen Werten von c_1 und c_2 ist die Unschärferelation maximal?

Übungen zu T2, SS 2008, Blatt 7

27) Berechnen Sie das Wellenpaket der freien Bewegung eines Teilchens

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \tilde{\psi}(p) e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}, \quad E = \frac{p^2}{2m} \tag{1}$$

wobei die Wellenfunkion im Impulsraum durch die Gaußfunktion

$$\tilde{\psi}(p) = d\, e^{-\frac{\sigma^2(p-p_0)^2}{2\hbar^2}}, \quad d = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi^{1/2}\hbar}} \tag{2}$$

gegeben ist.

Drücken Sie das Resultat durch die Größen

$$a := \frac{\sigma^2}{2\hbar^2} + i\frac{t}{2m\hbar}, \quad b := \frac{\sigma^2 p_0}{2\hbar^2} + i\frac{x}{2\hbar}, \quad c := \frac{\sigma^2 p_0^2}{2\hbar^2} \tag{3}$$

aus.

28) Skizzieren Sie den Realteil von $\psi(x,t)$ für einen fixen Zeitpunkt t und $p_0 = 0$ (unter Verwendung des Resultats von Bsp. 27).

29) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ unter Verwendung des Resultats von Bsp. 27.

Skizzieren und diskutieren Sie das Resultat für verschiedene Zeitpunkte t.

30) Berechnen Sie die Erwartungswerte des Ortsoperators $\langle X \rangle$, $\langle X^2 \rangle$ und die Unschärfe $(\Delta X)^2$ für das Gauß'sche Wellenpaket $\psi(x,t)$ mit dem Resultat aus Bsp. 29. Bestimmen Sie die Unschärferelation $\Delta X \Delta P$ (wobei ΔP durch die in Bsp. 23 berechneten Erwartungswerte gegeben ist).

Übungen zu T2, SS 2008, Blatt 8

31) a) Zeigen Sie, dass die Energie E für *normierbare* Lösungen der freien Schrödingergleichung

$$\psi(x,t) = \phi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

reell sein muss.

b) Zeigen Sie, dass die Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung immer reell gewählt werden kann.

32) Zeigen Sie, dass für einen Hamiltonoperator $H = P^2/2m + V(X)$ mit symmetrischem Potential $V(X) = V(-X)$ ein Basissystem von Eigenzuständen angegeben werden kann, das nur aus geraden und ungeraden Zuständen besteht.

Hinweis: Verwenden Sie den Paritätsoperator $P : Pf(x) = f(-x)$.

33) Ein quantenmechanisches Modell zur Berechnung der Energien und Zustände des NH_3 Moleküls ist das in Abb. 1 skizzierte Kastenpotential.

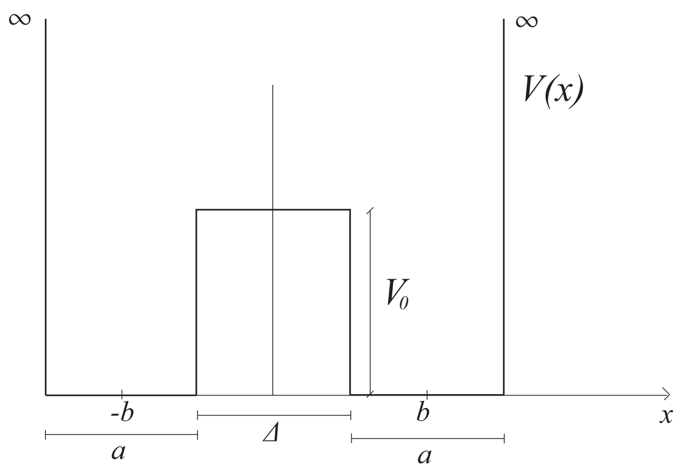

Abbildung 1: Potential $V(x)$ als Modell von NH_3

a) Berechnen Sie für dieses Potential die allgemeine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x), \quad E < V_0$$

in den Bereichen I, II und III unter Verwendung der Randbedingung $\psi(x = \pm(b + a/2)) = 0$.

b) Leiten Sie aus den Stetigkeitsbedingungen für ψ und $\frac{d\psi}{dx}$ Gleichungen für die Energien her (getrennt für die symmetrische und asymmetrische Lösung aus a)).

34) a) Geben Sie die Lösungen (nach den Energiewerten E) der Gleichungen aus Bsp. 33 b) für den symmetrischen und den asymmetrischen Fall sowie die mittlere Energie (aus diesen beiden Fällen) an. Nehmen Sie dazu an, dass $E << V_0$ und $q\Delta >> 1$ mit $q = 1/\hbar\sqrt{2m(V_0 - E)}$.

b) Skizzieren Sie die links- und rechts orientierten Zustände, die sich aus den Superpositionen von symmetrischen und asymmetrischen Lösungen (ψ_S und ψ_A) ergeben:

$$\psi_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_S - \psi_A\right), \;\psi_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_S + \psi_A\right).$$

Die zeitabhängigen Lösungen ergeben sich durch Superposition der stationären symmetrischen und asymmetrischen Zustände. Vergleichen Sie die Zeitentwicklung mit dem Zustand aus Bsp. 24.

Übungen zu T2, SS 2008, Blatt 9

35) Der Erzeuger von kohärenten Zuständen $|\alpha\rangle$ ist der Displacement Operator

$$D(\alpha) := \exp\left(\alpha\, a^\dagger - \alpha^* a\right),$$

mit dem Vernichter- bzw. Erzeugeroperator a und $a^\dagger$.

Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

(i) $D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha)$

(ii) $D^\dagger(\alpha)\, a\, D(\alpha) = a + \alpha$

(iii) $D^\dagger(\alpha)\, a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$

(iv) $D(\alpha + \beta) = D(\alpha)D(\beta)\exp\left(-i\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^*)\right)$

36) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle\beta|\alpha\rangle$ zweier kohärenter Zustände $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$. Sind die Zustände zueinander orthogonal?

Hinweis: Verwenden Sie $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$, mit $|0\rangle$ als Grundzustand (des harmonischen Oszillators).

37) Zeigen Sie die Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} d^2\alpha\, |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{1}\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Entwicklung

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

eines kohärenten Zustands in Eigenzustände $|n\rangle$ des harmonischen Oszillators, sowie Polarkoordinaten ($d^2\alpha = r dr d\phi$).

38) Zeigen Sie, dass sich für die Ortsdarstellung des zeitabhängigen kohärenten Zustands

$$\phi_\alpha(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}x_0}} \exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right) \exp\left(\sqrt{2}\, i \, \mathrm{Im}(\alpha(\mathrm{t}))\xi - \sqrt{2}\, \mathrm{Re}(\alpha(\mathrm{t}))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$$

explizit der Zustand

$$\phi_\alpha(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}x_0}} \exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right) \exp\left(\sqrt{2}\, \alpha(t)\xi - \frac{\xi^2}{2} - Re(\alpha(t))\, \alpha(t)\right)$$

ergibt, indem Sie die Reihenentwicklungen bis zur quadratischen Ordnung vergleichen.

Übungen zu T2, SS 2008, Blatt 10

39) Beweisen Sie, dass für den Drehimpulsoperator

$$L_i = \epsilon_{ijk} X_j P_k$$

folgende Algebra gilt:

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk} L_k \\ [L_i, X_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk} X_k \\ [L_i, P_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk} P_k \end{aligned}$$

40) Bestimmen Sie die Normierungskonstante $\mathcal{N}_\pm$ des Zustandes, der sich nach Anwendung des Leiteroperators $L_\pm := L_x \pm iL_y$ (d.h. L_+ oder L_-) auf die Kugelfunktionen Y_{lm} ergibt:

$$L_\pm Y_{lm} = \mathcal{N}_\pm Y_{lm\pm 1}$$

Hinweis: Drücken Sie das Produkt der Leiteroperatoren $L_\mp L_\pm$ durch $\vec{L}^2$ und L_z aus.

41) a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators L_x^2 im Zustand Y_{ll} (also $m = l$), $\langle L_x^2 \rangle$.

Hinweis: Drücken Sie L_x^2 durch $\vec{L}^2$ und L_z aus.

b) Diskutieren Sie die Unschärferelation

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2} \left| \langle L_z \rangle_{Y_{lm}} \right| .$$

Wann ist die Ungleichung saturiert?

42) Ein Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ sei in dem Zustand

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in den Spinzuständen

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu messen?

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \sigma_z \rangle$ im Zustand $|s\rangle$, wobei die Pauli Matrix σ_z gegeben ist durch

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$