Übungen zu M1, Sommersem. 2008, 5. Blatt

48. Die (nichtrelativistische) Bewegung eine Teilchens mit der Masse m und der Ladung q, das sich in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ befindet, wird durch das Differentialgleichungssystem

$$m\dot{\vec{v}} = q\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$$

beschrieben. Wie lautet das Differentialgleichungssystem für den Spezialfall $\vec{B} = B\vec{e}_3$, wobei B räumlich und zeitlich konstant ist. Finden Sie seine Lösung, indem Sie die komplexe Variable $u = v_1 + iv_2$ einführen. Ermitteln Sie sodann die Bahnkurve durch Integration von $\dot{\vec{x}} = \vec{v}$. Skizze!

49. Die eindimensionale Bewegung eines Teilchens mit Masse m erfolge in dem Kraftfeld $F(x) = -kx^3$. Finden Sie einen dazupassenden Ausdruck für die potentielle Energie $V(x)$. In welchem Bereich ist die Bewegung bei einem vorgegebenen Wert der Gesamtenergie möglich?

50. Ein harmonischer Oszillator mit Eigen(kreis)frequenz ω_0 und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung wird unter dem Einfluß einer periodischen äußeren Kraft $F_0 \cos \Omega t$ durch die folgende inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben:

$$m\ddot{x} + 2m\rho\dot{x} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \Omega t, \quad \rho > 0.$$

(a) Wie lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung? Machen Sie die nötigen Fallunterscheidungen.

(b) Ermitteln Sie eine Lösung der inhomogenen Gleichung, indem Sie das Problem zunächst für die komplexe „Kraft“ $F_0 \exp i\Omega t$ behandeln und dann den Realteil nehmen. Schreiben Sie den dabei auftretenden Term $\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\rho\Omega$ in der Polardarstellung

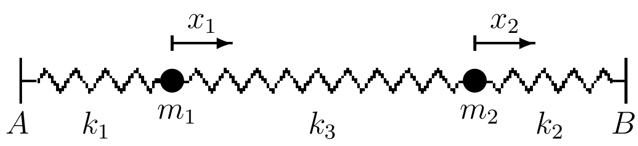
$$\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\rho\Omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\rho^2\Omega^2}\; e^{i\delta}, \quad \delta = \arctan \frac{2\rho\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

und verwenden Sie den Winkel δ in dem Ausdruck für

$$x_s(t) = A \cos(\Omega t - \delta).$$

Diskutieren Sie das Verhalten der Amplitude A und der Phasenverschiebung δ als Funktion der äußeren Frequenz Ω für zwei verschiedene Werte von ρ.

51. Eine Masse m_1 ist an einer Feder mit Federkonstante k_1 befestigt, welche ihrerseits am Punkt A eingespannt ist. Ebenso ist die Masse m_2 an einer Feder mit Federkonstante k_2 befestigt, welche am Punkt B eingespannt ist. Die beiden Massen sind durch eine weitere Feder mit Federkonstante k_3 verbunden. Die Position der Masse m_1 (m_2) wird durch ihre Auslenkung x_1 (x_2) aus der Ruhelage gekennzeichnet. Eine Bewegung soll nur in horizontaler Richtung möglich sein, weiters werden die Massen der Federn vernachlässigt.



Das abgebildete System von zwei gekoppelten harmonischen Oszillatoren wird durch die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} - \frac{k_1 x_1^2}{2} - \frac{k_2 x_2^2}{2} - \frac{k_3(x_1 - x_2)^2}{2}$$

beschrieben. Ermitteln Sie die aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2,$$

folgenden Bewegungsgleichungen. Vergewissern Sie sich, dass die auf die zwei Massenpunkte wirkenden Kräfte richtig beschrieben werden.

52. Berechnen Sie die Eigenfrequenzen des im vorigen Beispiel betrachteten Systems. Überzeugen Sie sich an Hand der folgenden Spezialfälle von der Plausibilität Ihres Ergebnisses:

    (a) $k_3 = 0$

    (b) $m_2 \to \infty$

    (c) $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2$

    Welchen physikalischen Situationen entsprechen die Eigenschwingungen im letzten Fall. Geben Sie für diesen Fall die Eigenvektoren und die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems explizit an.

53. Berechnen Sie $\sin i$, $\ln(1+i)$, $\sqrt{i}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[3]{-1}$.

54. Überprüfen Sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die Funktionen z^3, $\exp z$, $\cos z$.