Übungen zu M1, Sommersem. 2008, 3. Blatt

19. Wie lautet die Spektraldarstellung der linearen Abbildung R des vorigen Beispiels? $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei eine beliebige, für die Eigenwerte von R definierte Funktion. Geben Sie $f(R)$ mit Hilfe der Spektraldarstellung von R an. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis für R^2 und R^{-1}.

20. Fassen Sie die Spiegelungsmatrix S von Beispiel 8 als Element aus $L(U^3)$ auf. Geben Sie die Eigenräume $\mathcal{M}_\alpha$ und die dazugehörigen Projektoren $P_{\mathcal{M}_\alpha}$ an. Überprüfen Sie

$$P^\dagger_{\mathcal{M}_\alpha} = P_{\mathcal{M}_\alpha}, \quad P_{\mathcal{M}_\alpha} P_{\mathcal{M}_\beta} = \delta_{\alpha\beta} P_{\mathcal{M}_\alpha}$$

und die Vollständigkeitsrelation. Wie lautet die Spektraldarstellung von S? Geben Sie $f(S)$ für eine beliebige, für die Eigenwerte von S definierte Funktion an. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis für S^2 und S^{-1}.

21. Aufgabenstellung wie im vorigen Beispiel, jedoch für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\cos(2\pi A) =?$, $\sin(2\pi A) =?$

22. $\mathcal{H}$ sei der von den $2N + 1$ Funktionen

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp \frac{2\pi i n x}{L}, \quad -N \le n \le N, \quad L > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

aufgespannte komplexe Vektorraum. Seine Elemente,

$$\psi = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n \, \phi_n, \quad c_n \in \mathbb{C},$$

sind periodische Funktionen mit Periode L, d.h. $\psi(x + L) = \psi(x)$. $\mathcal{H}$ kann durch die Einführung des Skalarprodukts

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_0^L dx \, \varphi(x)^* \psi(x)$$

zu einem unitären Vektorraum gemacht werden. Überprüfen Sie die Eigenschaften des Skalarprodukts und zeigen Sie, dass die Elemente $\{\phi_{-N}, \dots, \phi_N\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ bilden.

23. Der „Impulsoperator“ $P \in L(\mathcal{H})$ sei durch die Vorschrift

$$(P\psi)(x) = -i\hbar \frac{d\psi(x)}{dx}, \quad \psi \in \mathcal{H}$$

definiert. Zeigen Sie, dass der Operator P hermitesch ist, bestimmen Sie seine Eigenvektoren und Eigenwerte. Wie lautet die Spektraldarstellung von P?

24. Der Translationsoperator $T_a \in L(\mathcal{H})$ sei durch

$$(T_a\psi)(x) = \psi(x-a), \quad \psi \in \mathcal{H}, \quad a \in \mathbb{R}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $T_a T_b = T_{a+b}$ erfüllt ist und T_a unitär ist. Bestimmen Sie Eigenvektoren und Eigenwerte von T_a. Wie lautet die Spektraldarstellung von T_a? Zeigen Sie mit Hilfe der Spektraldarstellung, dass $T_a = \exp(-iaP/\hbar)$ gilt.

25. $A : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ sei ein ein normaler Operator auf einem **zweidimensionalen** unitären Vektorraum $\mathcal{U}$ mit Eigenwerten $a_1 \neq a_2$. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei eine beliebige für $a_{1,2}$ definierte Funktion. Zeigen Sie, dass der lineare Operator $f(A)$ dann mit Hilfe der Formel

$$f(A) = \frac{f(a_1) - f(a_2)}{a_1 - a_2} A + \frac{a_1 f(a_2) - a_2 f(a_1)}{a_1 - a_2} \mathbb{1}$$

als Linearkombination des Operators A und des Einheitsoperators $\mathbb{1}$ geschrieben werden kann. Es ist also in diesem Fall nicht notwendig die Eigenvektoren (bzw. die dazugehörigen Projektionsoperatoren $P_{1,2}$) explizit zu berechnen. Was ergibt sich im Fall $a_1 = a_2$?

Hinweis: Drücken Sie die Projektoren $P_{1,2}$ auf die Eigenvektoren von A mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation $P_1 + P_2 = \mathbb{1}$ und der Spektraldarstellung $A = a_1 P_1 + a_2 P_2$ durch A und $\mathbb{1}$ aus und setzen Sie diese Ausdrücke sodann in $f(A) = f(a_1)P_1 + f(a_2)P_2$ ein.

26. Berechnen Sie $\exp(-i\alpha\sigma_1/2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, durch

   a) Verwendung der Spektraldarstellung,
   b) Entwicklung in eine Potenzreihe,
   c) mit Hilfe der Formel des vorigen Beispiels.

27. Überprüfen Sie die Gruppeneigenschaften der SU(2).

28. Zeigen Sie

$$\exp(-i\alpha\vec{n}\cdot\vec{\sigma}/2) = \mathbb{1}_2 \cos(\alpha/2) - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin(\alpha/2), \quad \vec{n} \in \mathbb{R}^3, \quad |\vec{n}| = 1,$$

durch Verwendung der Formel von Aufgabe 25.