Übungen zu M1, Sommersem. 2008, 2. Blatt

9. Im dreidimensionalen euklidischen Raum sei eine rechtshändige Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ gegeben. Wie wirkt eine Drehung R um den Winkel α auf diese Basisvektoren, wenn die Drehachse in Richtung von $\vec{e}_1$ zeigt? Wie lautet die Matrixdarstellung von R bezüglich $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$? Was erhält man für R^2, R^{-1}, R^T, $R^T R$, $\det R$?

10. Überprüfen Sie die Gruppeneigenschaften der orthogonalen Gruppe $O(n)$. Zeigen Sie, dass die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$ eine Untergruppe von $O(n)$ bildet. Demonstrieren Sie mit Hilfe einer quaderförmigen Schachtel, dass $SO(3)$ eine **nichtabelsche** Gruppe ist, dass also im Allgemeinen $R_2 R_1$ von $R_1 R_2$ verschieden ist.

11. Sei $\mathcal{F}$ der unitäre Vektorraum der Funktionen der Form

$$\varphi(x) = e^{-x^2/2} p(x)$$

auf $\mathbb{R}$ (p ist ein Polynom vom Grad $\leq n$), welcher mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi(x)^* \psi(x)$$

versehen wurde. Überprüfen Sie die von einem komplexen Skalarprodukt geforderten Eigenschaften.

12. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ax^2}, \quad a > 0,$$

indem Sie in

$$I(a)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ax^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-ay^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-a(x^2+y^2)}$$

die Variablentransformation $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ durchführen. Die gesuchten Integrale mit geradem n erhält man nun durch m-maliges Differenzieren nach dem Parameter a ($n = 2m$), wobei man am Ende der Rechnung $a = 1$ setzt. Der Wert der Integrale für ungerades n ist offensichtlich.

13. Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Funktionen
$$e^{-x^2/2},\ e^{-x^2/2}x,\ e^{-x^2/2}x^2,\ e^{-x^2/2}x^3$$
an, um ein Orthonormalsystem in $\mathcal{F}$ zu konstruieren.

14. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der adjungierten Abbildung:

    (a) $(c_1A_1 + c_2A_2)^\dagger = c_1^*A_1^\dagger + c_2^*A_2^\dagger, \quad c_{1,2} \in \mathbb{C}, \quad A_{1,2} \in L(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.

    (b) $A^{\dagger\dagger} = A, \quad A \in L(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.

    (c) $(BA)^\dagger = A^\dagger B^\dagger, \quad A \in L(\mathcal{U}, \mathcal{V}),\ B \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

15. Zeigen Sie, dass die Vektoren
$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix},\ \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$$
eine Orthonormalbasis des U^2 bilden, indem Sie die Eigenschaften
$$\varphi_k^\dagger\varphi_l = \delta_{kl}, \quad \varphi_1\varphi_1^\dagger + \varphi_2\varphi_2^\dagger = \mathbb{1}$$
(Orthonormalität und Vollständigkeit) überprüfen.

16. Die Paulischen Spinmatrizen $\sigma_k \in L(U^2)$ $(k = 1, 2, 3)$ sind durch die hermiteschen Matrizen
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$
definiert. Berechnen Sie $\det\sigma_k$ und $\operatorname{Tr}\sigma_k$. Was folgt daraus für die Eigenwerte der Paulimatrizen? Ermitteln Sie die (normierten) Eigenvektoren von σ_k und zeigen Sie, dass diese jeweils eine Orthonormalbasis von U^2 bilden.

17. Geben Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix an:
$$\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \sum_{k=1}^{3} n_k\sigma_k, \quad n_k \in \mathbb{R},\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

18. Fassen Sie die Drehmatrix
$$R = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
als Element aus $L(U^3)$ auf. Ermitteln Sie Eigenwerte und Eigenvektoren sowie die Projektoren $P_{\mathcal{M}_\alpha}$ auf die Eigenräume $\mathcal{M}_\alpha$. Zeigen Sie:
$$P_{\mathcal{M}_\alpha}^\dagger = P_{\mathcal{M}_\alpha}, \quad P_{\mathcal{M}_\alpha}P_{\mathcal{M}_\beta} = \delta_{\alpha\beta}P_{\mathcal{M}_\alpha}.$$