Übungen zu M1, Sommersem. 2008, 1. Blatt

1. Zeigen Sie, dass man im $\mathbb{R}^n$ durch

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,\ p_i > 0$$

ein Skalarprodukt definieren kann.

2. $\mathcal{P}_n(I)$ sei der euklidische Vektorraum der auf einem endlichen Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ definierten reellen Polynome vom Grad $\leq n$,

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad x \in [a, b],$$

mit dem Skalarprodukt

$$(p|q) = \int_a^b dx\, p(x) q(x).$$

Überprüfen Sie, dass die für ein Skalarprodukt geforderten Eigenschaften erfüllt sind.

3. $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ seien euklidische Vektorräume und $A \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Dann ist die zu A transponierte Abbildung $A^T \in L(\mathcal{W}, \mathcal{V})$ durch die Eigenschaft

$$(w|Av)_{\mathcal{W}} = (A^T w|v)_{\mathcal{V}} \quad \forall v \in \mathcal{V},\ \forall w \in \mathcal{W}$$

definiert. Zeigen Sie, dass aus dieser Definition folgt:

   (a) $(a_1 A_1 + a_2 A_2)^T = a_1 A_1^T + a_2 A_2^T, \quad a_{1,2} \in \mathbb{R}, \quad A_{1,2} \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

   (b) $A^{TT} = A, \quad A \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

   (c) $(BA)^T = A^T B^T, \quad A \in L(\mathcal{V}, \mathcal{W}),\ B \in L(\mathcal{W}, \mathcal{X})$.

4. In dem $n+1$-dimensionalen Funktionenraum $\mathcal{P}_n([0, 1])$ bilden die Elemente

$$p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x, \ldots p_n(x) = x^n$$

eine Basis. Berechnen Sie die Skalarprodukte $(p_i|p_j)$. Zeigen Sie, dass p_0, $\sqrt{3}p_1$ und $\sqrt{5}p_2$ Einheitsvektoren sind und p_0 und $p_0 - 2p_1$ aufeinander orthogonal stehen.

5. Im E^3 seien die Vektoren

$$f_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Vektoren f_1, f_2 ein Orthonormalsystem bilden. Ergänzen Sie dieses durch Hinzunahme eines geeigneten Vektors f_3 zu einer Orthonormalbasis des E^3. Überprüfen Sie die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{i=1}^{3} f_i f_i^T = \mathbf{1}.$$

6. Die Elemente $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$, $p_3(x) = x^3$ bilden eine Basis des euklidischen Vektorraumes $\mathcal{P}_3([0,1])$. Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf diese Basis an, um eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_3([0,1])$ zu erhalten.

7. Die Richtung einer durch den Ursprung gehenden Geraden im E^2 sei durch den Einheitsvektor

$$a = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

gegeben. Ermitteln Sie jene Matrix S_a, die einer Spiegelung an dieser Geraden entspricht. Machen Sie eine Skizze und ermitteln Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte von S_a durch Betrachten Ihrer Zeichnung. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis rechnerisch. Was erhält man für S_a^2, S_a^{-1}, S_a^T, $S_a^T S_a$, $\det S_a$? Welche geometrische Bedeutung haben die Transformationen $S_a S_{e_1}$ und $S_{e_1} S_a$?

   Hinweis: Zerlegen Sie den Vektor x, auf den die Abbildung S_a wirkt, in einen Anteil in Richtung von a und in einen Anteil, der auf a normal steht und verwenden Sie weiters die Linearität von S_a.

8. Eine durch den Ursprung gehende Ebene im E^3 sei durch den Normalvektor

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

gegeben. Ermitteln Sie jene Matrix S, die einer Spiegelung an dieser Ebene entspricht. Machen Sie eine Skizze und ermitteln Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte dieser linearen Abbildung durch eine rein geometrische Betrachtung. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis sodann rechnerisch. Was erhält man für S^2, S^{-1}, S^T, $S^T S$, $\det S$?