Übungen zu T2, SS 2007, Blatt 6

30) Zeige

$$\left\langle \vec{x} \left| \hat{\vec{p}} \right| \vec{x}' \right\rangle = -i\hbar \vec{\nabla}_x \delta^3 \left(\vec{x} - \vec{x}' \right) .$$

31) Überprüfe die Vertauschungsrelationen zwischen $\hat{\vec{x}}$ und $\hat{\vec{p}}$ in der Matrixdarstellung $\left\langle \vec{x} \left| \hat{\vec{x}} \right| \vec{x}' \right\rangle$ und $\left\langle \vec{x} \left| \hat{\vec{p}} \right| \vec{x}' \right\rangle$.

32) Überprüfe die Vertauschungsrelationen für den harmonischen Oszillator

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger \right] = \mathbb{1}, \ \left[\hat{H}, \hat{a} \right] = -\hbar\omega\hat{a}, \ [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

explizit in der Energiedarstellung.

33) Löse die Gleichung für den Grundzustand des harmonischen Oszillators

$$\hat{a}|E_0\rangle = 0$$

in der x-Darstellung.

34) Berechne mit Hilfe der Leiteroperatoren für den harmonischen Oszillator die Schwankungsquadrate bezüglich der stationären Zustände,

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right), \ (\Delta p)^2 = m\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) .$$

35) Betrachte die Eigenzustände zu $\hat{a}$:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle .$$

Entwickle $|\alpha\rangle$ nach den stationären Eigenfunktionen $|E_n\rangle$ des harmonischen Oszillators und zeige

$$|\alpha\rangle = \sum_n e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |E_n\rangle .$$

36) Gegeben der Zustand $|\alpha\rangle$ aus Bsp. 35 zur Zeit $t = 0$. Aus der Zeitentwicklung von $|E_n\rangle$ bestimme die Zeitenwicklung von $|\alpha, t\rangle$.

37) Zeige

$$\langle \alpha, t|\hat{x}|\alpha, t\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}} |\alpha| \cos(\omega t - \delta) ,$$

mit $\alpha = |\alpha|e^{i\delta}$.