Übungen zu M2 SS 2006

1. Zur Notation in der Vorlesung: Der Ausdruck $F^i(t, z^j),\ \ i, j = 1, 2, ..N$ bezeichnet einen Spaltenvektor der Art

$$F^i(t, z^j) = \begin{pmatrix} F^1(t, z^1, z^2, \dots z^N) \\ F^2(t, z^1, z^2, \dots z^N) \\ \vdots \\ F^N(t, z^1, z^2, \dots z^N) \end{pmatrix}$$

Sei nun $N = 6$. Wir setzen $z^i = q^i$ und $z^{i+3} = p^i$, $i = 1, 2, 3,$ weiters $F^i = m^{-1}p^i$ und $F^{i+3} = K^i(t, q^j),\ \ i, j = 1, 2, 3.$ Zeige, dass (und in welchem Sinn) das Anfangswert (AW-) Problem für die Gleichung

$$\dot{z}^i = F^i(t, z^j), \quad i, j = 1, \dots 6 \tag{1}$$

äquivalent ist mit jenem für die Newton'sche Bewegungsgleichung eines Punktteilchens der Masse m im zeitabhängigen Kraftfeld $\overrightarrow{K}$.

2. Löse das AW-Problem

$$\dot{z} = z^3 \tag{2}$$

mit $z(0) = \mathring{z} > 0$. Existiert $z(t)$ für alle $t > 0$? Was passiert für $t < 0$?
(Eventuell: allgemein für $\dot{z} = z^n$ mit $n > 1$. Noch allgemeiner: $\dot{z} = F(z)$ mit $F(z) > 0$ für $\mathring{z} \leq z < \infty$ and $\int_{\mathring{z}}^{\infty} (F(z))^{-1}\, dz < \infty$.)

3. Seien a, b, u, v Konstante mit $au + bv \neq 0$. Betrachte, für eine Funktion $f = f(x, y)$, die PDE der Form

$$(a\, \partial_x + b\, \partial_y) f = 0 \tag{3}$$

zusammen mit der Anfangsbedingung $f(x, y) = \mathring{f}(x, y)$ für $ux + vy = 0$. Zeige durch explizites Nachrechnen, dass

$$f(x, y) = \mathring{f}\left(-\frac{v}{au + bv}(-bx + ay), \frac{u}{au + bv}(-bx + ay)\right) \tag{4}$$

das AW-Problem löst.

4. Löse die PDE

$$(\partial_x + y\, \partial_y) f = 0 \tag{5}$$

mit der Anfangsbedingung $f(0, y) = y^3$.

5*. Sei $\rho(t,x)$ Lösung der (1+1)-dimensionalen Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho(t,x) + \partial_x[v(t,x)\rho(t,x)] = 0 \tag{6}$$

und sei $\varphi(t,X)$ definiert durch das (nichtlineare) ODE-Problem

$$\partial_t\varphi(t,X) = v(t,\varphi(t,X)), \qquad \varphi(0,X) = X \tag{7}$$

(a) Dann gilt:

$$\rho(t,\varphi(t,X))\,\partial_X\varphi(t,X) = \rho(0,X) \tag{8}$$

(Hinweis: Überprüfe Glg.(8) für $t = 0$ und zeige, dass ∂_t der linken Seite verschwindet.)

(b) (7,8) bestimmen die Lösung des AW-Problems für Glg.(6). Hinweis: $\partial_X\varphi > 0$ und die Abbildung $X \mapsto x = \varphi(t,X)$ ist umkehrbar. (Die Umkehrabbildung $X = X(t,x)$ ist gerade die Funktion gleichen Namens aus der Vorlesung.)

5. Löse das PDE-Problem

$$\partial_t f + f\,\partial_x f = 0, \qquad f(0,x) = f_0(x) = Ax + B, \quad A, B \text{ Konstante} \tag{9}$$

6. Reduziere das PDE-Problem

$$(-\partial_t^2 + \partial_x^2)f(t,x) = 0 \qquad f(0,x) = \text{vorg.}, \;\; \partial_t f(0,x) = \text{vorg.} \tag{10}$$

auf ein System 1.ter Ordnung.

7. Finde eine lineare Transformation, die das konstante Vektorfeld

$$a^i = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

in die Form

$$\bar{a}^j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

bringt. Hinweis: Nimm $a^1 \neq 0$ an und wähle $\bar{x}^i = A^i{}_j x^j$ so, dass $A^2{}_2 = A^3{}_3 = 0$ ist.

8. Klassifiziere die Gleichungen

$$a)\ (\partial_x^2 - 5\,\partial_x\partial_y)f(x,y) = 0, \quad b)\ (4\,\partial_x^2 + 6\,\partial_x\partial_y + 9\,\partial_y^2)f(x,y) = 0 \tag{11}$$

c) (optional) Untersuche allgemein

$$(\alpha\,\partial_x^2 + 2\beta\,\partial_x\partial_y + \gamma\,\partial_y^2)f(x,y) = 0 \tag{12}$$

in Abhängigkeit von der "Diskriminante" $D = \alpha\gamma - \beta^2$.

9. Was ist die Bedeutung jener Anfangsdaten $\Phi(x) = f(0,x)$, $\Psi(x) = \partial_t f(0,x)$ für die Wellengleichung mit

$$c\,\partial_x\Phi(x) \pm \Psi(x) = 0\ ? \tag{13}$$

10. ("Der Hammerschlag") Sei $\Phi(x) = 0$ und $\Psi(x) = 1$ für $|x| < a$ und $\Psi(x) = 0$ für $|x| \geq a$ und skizziere das Wellenprofil für $t = \frac{a}{2c}$ und $t = \frac{3a}{2c}$ als Funktion von x. (Hinweis: Etwa für $t = a/2c$ betrachte getrennt die Bereiche $|x| < a/2$, $a/2 < |x| < 3a/2$, $|x| > 3a/2$.)

11. Sei $f(t,x)$ Lösung der Wellengleichung. Dann gilt dies auch für

a) $f(t-T, x-X)$
b) $f(at, ax)$
c) $f(t', x')$, wobei

$$t' = \gamma(v)(t - \frac{v}{c^2}\,x), \quad x' = \gamma(v)(x - vt), \tag{14}$$

mit $|v| < c$ und $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

12. Eine Transformation $(t,x) \mapsto (t'(t,x), x'(t,x))$ heisst Symmetrie der PDE, wenn für jede Lösung $f(t,x)$ auch $f(t',x')$ die Gleichung löst. Welche der folgenden Transformationen sind Symmetrien der Diffusionsgleichung $f'' = \frac{1}{\chi}\dot{f}$?

$a)\ t' = t - T,\ x' = x - X, \quad b)\ t' = t,\ x' = x - vt, \quad c)\ t' = t,\ x' = -x,$
$d)\ t' = -t,\ x' = x, \quad e)\ t' = a^2 t,\ x' = ax, \quad f)\ t' = i\,t,\ x' = x,\ i^2 = -1$

13. Löse die (homogene) Diffusionsgleichung mit der Anfangsbedingung $f(0,x) = e^{-x}$. (Hinweis: Ergänze den Exponenten im Integral auf ein vollständiges Quadrat.)

14. Sei $f(\vec{x})$ eine kugelsymmetrische Funktion auf $\mathbb{R}^n$, d.h. $f(\vec{x}) = g(r)$ mit $r = |\vec{x}|$. Dann gilt

$$a)\ \partial_i f = \frac{x_i}{|r|}\,g', \quad b)\ \partial_i\partial_j f = \frac{x_i x_j}{r^2}\,g'' + \frac{r^2\delta_{ij} - x_i x_j}{r^3}\,g', \quad c)\ \Delta f = r^{-(n-1)}(r^{n-1}g')'. \tag{15}$$

Hier ist Δ der $n-$dimensionale Laplace-Operator, also

$$\Delta f = [(\partial_1)^2 + (\partial_2)^2 + \ldots + (\partial_n)^2]f = \delta^{ij}\,\partial_i\partial_j f \tag{16}$$

15. Beweise: die Funktion $f(t,\vec{x})$ auf $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$f(t,\vec{x}) = t^{-n/2} e^{-\frac{r^2}{4\chi t}}, \quad \chi > 0 \tag{17}$$

löst die Diffusionsgleichung in $1+n$ Dimensionen, d.h. es gilt

$$\dot{f} - \chi \Delta f = 0 \tag{18}$$

16. Beweise: Die Funktionenfolge $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\epsilon^2+x^2}$ strebt für ϵ nach 0 gegen die Deltafunktion. Dasselbe für die Folge $f_\epsilon(x) = \frac{1}{2\epsilon}\,\Theta(\epsilon - |x|)$.

17. Sei $f(t,x) = G(t,r)$ eine kugelsymmetrische Lösung der Wellengleichung in 3+1. Dann löst $r\,G(t,r)$ die Wellengleichung in $1+1$.

18. Beweise die Formeln

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|}\,[\delta(x-a) + \delta(x+a)], \qquad \delta^{(3)}(\vec{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{19}$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x), \qquad x\,\delta(x-a) = a\,\delta(x-a), \qquad 3\,\delta''(x) + x\,\delta'''(x) = 0 \tag{20}$$

19. Löse die Wellengleichung in 1+3 mit den Anfangsbedingungen

$$f(0,\vec{x}) = 0, \qquad (\partial_t f)(0,\vec{x}) = Ae^{-Br^2}, \quad A, B > 0 \text{ Konstante} \tag{21}$$

20. Verifiziere durch explizite Rechnung, dass

$$(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta)\frac{\delta(ct-r)}{4\pi r} = 0 \tag{22}$$

für $(t,\vec{x}) \neq (0,\vec{0})$.

21. Das O-Symbol: Sei $l \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass $f(\vec{x}) = O^\infty(1/r^l)$, wenn für alle Zahlen $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{r^l}\right), \quad |\partial_i f(\vec{x})| = O\left(\frac{1}{r^{l+1}}\right), \ldots |\partial_{i_1}\partial_{i_2}.....\partial_{i_k} f(\vec{x})| = O\left(\frac{1}{r^{k+l}}\right) \tag{23}$$

Für welche der folgenden Funktionen ist das der Fall, und für welches l:

$$a)\ f(\vec{x}) = \frac{y}{(1+2r^6)^{1/2}}\,,\ b)\ f(\vec{x}) = \frac{\sin^5 2r}{r^3}\,,\ c)\ f(\vec{x}) = \frac{\cos\left((1+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right)}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{24}$$

22. Berechne das Potential $f(\vec{x})$ der konstanten Ladungsdichte $\rho(\vec{x}) = \rho_0\Theta(R - |\vec{x}|)$ für $|\vec{x}| < R$.

23. Berechne das Potential des Dipols $\rho(\vec{x}) = (\vec{a}\,\vec{\nabla})\delta^{(3)}(\vec{x})$ mit $\vec{a} = \text{const.}$

24. Löse das Dirichlet-Problem für die Kreisscheibe mit $F(\phi) = 1$.

25. Die Green'sche Formel: Sei Ω ein beschränkter Bereich in $\mathbb{R}^3$. Zeige mit Hilfe des Satzes von Gauss, dass für beliebige Funktionen u, v gilt

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) d^3x = \int_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) dS \tag{25}$$

26. Das Dirichlet-Problem für die Kugel $r < R$: Sei $\rho = |\vec{x} - \vec{x}\,'|$ und $\bar{\rho} = |\vec{y} - \vec{x}\,'|$, wobei $\vec{y} = \frac{R^2\vec{x}}{r^2}$. Sei $G(\vec{x}, \vec{x}\,')$ gegeben durch

$$G(\vec{x}, \vec{x}\,') = -\frac{1}{4\pi\rho} + \frac{R}{r}\frac{1}{4\pi\bar{\rho}} \tag{26}$$

Zeige, dass

$$\text{a) } G(\vec{x}, \vec{x}\,') = 0, \text{ wenn } r = R, \qquad \text{b) } \Delta_x G = 0, \text{ wenn } \vec{x} \neq \vec{x}\,' \tag{27}$$

$$\text{c) } \int_{r'=R} \frac{\partial G}{\partial n'} F(\vec{x}\,')\, dS' = \frac{R^2 - r^2}{4\pi R} \int_{r'=R} \frac{F(\vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|^3}\, dS' \tag{28}$$

Bemerkung (ohne Beweis): Der Ausdruck in (28) löst das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung in der Kugel.

27. Wir betrachten

$$-f''(x) = \lambda f(x) \tag{29}$$

für Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(1)$, $f'(0) = f'(1)$. Zeige durch explizite Rechnung, dass dieses Problem für $\lambda < 0$ keine Lösung hat.

28. Löse das Eigenwertproblem

$$-f''(x) = \lambda f(x) \tag{30}$$

mit den Randbedingungen $f'(0) = 0,\ f'(1) = 0$.

29. Betrachte den Operator $L : f \mapsto f''$ für Funktionen $f(x)$ im Intervall $[0, l]$ mit den Randbedingungen $f'(0) = 0 = f'(l)$. Zeige: dieser Operator ist symmetrisch im Sinne von $\langle f|Lg\rangle = \langle Lf|g\rangle$, wobei $\langle f|g\rangle = \int_0^l f(x)g(x)dx$.

30. Betrachte die Eigenwertgleichung $-f''(x) = \lambda f(x)$ mit den Randbedingungen $f(0) = 0$, $f'(l) + af(l) = 0$. Zeige: wenn $al < -1$ ist, gibt es einen negativen Eigenwert. (Hinweis: Man setzt $\lambda = -\beta^2$ und erhält eine transzendente Gleichung für β.)

31. Beweise, zumindest für $l = 0, 1, 2$, dass

$$\int_0^\pi [P_l(\cos\theta)]^2 \sin\theta d\theta = \frac{2}{2l+1} \tag{31}$$

Hinweis: Benutze die Formel von Rodrigues und (mehrfache) partielle Integration.

32. Betrachte die folgenden Funktionen auf der Sphäre

$$f(\theta,\phi) = \sum_{i,j}(3a_i a_j - \delta_{ij})n^i n^j,\ g(\theta,\phi) = \sum_{i,j,k}(5a_i a_j a_k - \delta_{ij}a_k - \delta_{ik}a_j - \delta_{jk}a_i)n^i n^j n^k, \tag{32}$$

wobei a_i ein konstanter Vektor mit $a_i a_j \delta^{ij} = 1$ ist und n^i der Einheitsvektor $n^i = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\ \sin\phi, \cos\theta)$. Zeige, dass

$$a)\ \Delta f = -\frac{6}{r^2} f \qquad b)\ \Delta g = -\frac{12}{r^2} g \tag{33}$$

Hinweis: Benutze entweder $n^i = x^i/r$ nebst direkter Rechnung oder ein mehr "theoretisches" Argument.

33. Berechne die Euler-Lagrange Gleichung für folgende Lagrangedichten:

a) $L = \frac{1}{2}e^{\gamma t}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$, wobei $x : t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$, $\gamma = \text{const}$, $\omega = \text{const}$

b) $L = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)$, wobei $\phi : x^\mu \in \mathbb{R}^4 \mapsto \phi(x^\mu) \in \mathbb{R}$, $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-+++)$

c) $L = \frac{1}{2}[\lambda(\text{tr}\,\mathbf{M})^{\mathbf{2}} + \mu\,\text{tr}((\mathbf{M}+\mathbf{M}^{\mathbf{T}})\mathbf{M})]$, $\mu, \lambda\ \ldots$ (Lamé)-Konstanten, $\mathbf{M}^j{}_i = \partial_i\phi^j$, tr$\mathbf{N}$ die Spur der Matrix $\mathbf{N}$ und $\phi^i : x^j \in \mathbb{R}^3 \mapsto \phi^i(x^j) \in \mathbb{R}^3$