Theoretische Physik III
Elektrodynamik

Helmut Neufeld
Fakultät für Physik
Universität Wien

Wintersemester 2017

Vorwort

Dieses Skriptum ist eine korrigierte und ergänzte Version der ursprünglich für meine im Wintersemester 2013 abgehaltene Lehrveranstaltung „Elektrodynamik“ verfassten Vorlesungsunterlagen. Es beinhaltet jetzt auch die Berücksichtigung der singulären Anteile der Dipolfelder und eine ausführlichere Diskussion der Frontgeschwindigkeit.

Mein besonderer Dank gebührt Claudia Krizmanits für das Anfertigen der Abbildungen, die Überarbeitung eines ursprünglich für eine Theorievorlesung für Lehramtskandidaten konzipierten Skriptums, eine sorgfältige und kritische Durchsicht aller Kapitel sowie für zahlreiche Korrekturen und Verbesserungsvorschläge.

Walter Grimus verdanke ich die Ausarbeitung des Abschnitts über das Prinzip von Huygens in beliebigen Raumdimensionen und der nun neu aufgenommenen Behandlung der Signalgeschwindigkeit einer Welle in einem Medium.

Gerhard Ecker hat mir dankenswerterweise die Latex-Version des Skriptums seiner zuletzt im Wintersemester 2008/9 gehaltenen Elektrodynamikvorlesung zur Verfügung gestellt. Der Abschnitt 3.38 über „Streuung“ wurde vollständig übernommen und nur in Notation und Konventionen den vorliegenden Vorlesungsunterlagen angepasst. Ebenso beruht das Kapitel 4 über die „Elektrodynamik der Kontinua“ (abgesehen von einigen kleineren Zusätzen und Modifikationen) auf dem entsprechenden Teil des Eckerschen Skriptums. Auch an anderen Stellen diente es mir als Quelle der Inspiration und ich möchte seine Lektüre wärmstens empfehlen (http:homepage.univie.ac.at/Gerhard.Ecker/).

Schließlich danke ich allen Studentinnen und Studenten, die mich auf Druckfehler in früheren Versionen des Skriptums aufmerksam gemacht haben.

Helmut Neufeld, Februar 2018

Literatur

L.D. Landau, E.M. Lifschitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band II, Klassische Feldtheorie, Akademie Verlag, Berlin, 1992

L.D. Landau, E.M. Lifschitz: Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band VIII, Elektrodynamik der Kontinua, Akademie Verlag, Berlin, 1985

R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: The Feynman Lectures on Physics, vol. I, II, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965

P. Hertel: Theoretische Physik, Springer, Berlin Heidelberg, 2007

P. Hertel: Elektrodynamik, Theoretische Physik II, Skriptum einer im Wintersemester 1973/74 an der Universität Wien gehaltenen Vorlesung

G. Ecker: Elektrodynamik, Theoretische Physik 3, Skriptum einer im Wintersemester 2008/9 an der Universität Wien gehaltenen Vorlesung

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Methodik der Physik

Galileo Galilei[1]: gezielte Fragen an die Natur (Experiment); Formulierung von Gesetzmäßigkeiten in mathematischer Sprache

„Hände schmutzig machen“ (Experiment) statt „reines Denken“ oder Berufung auf „alte Schriften“

Herstellen von (zunächst nicht offensichtlichen) Zusammenhängen

Beispiele:

1. Fall eines Apfels zur Erde: gleicher Grund wie Anziehungskraft zwischen Erde und Mond, Sonne und Planeten, etc.

2. alle Körper fallen (unabhängig von Beschaffenheit oder Gewicht) ohne Luftwiderstand gleich schnell $\longrightarrow$ „Schwerelosigkeit“ des Raumfahrers im antriebslosen Raumschiff (lokales Inertialsystem)

3. Kraftgesetz zwischen makroskopischen („Punkt“-)ladungen im Schulversuch gleich wie zwischen Elektron und Proton im Wasserstoffatom

4. Element Helium zuerst durch spektroskopische Untersuchung des Sonnenlichts gefunden und erst danach in der Erdatmosphäre nachgewiesen (gleiche Naturgesetze auf der Sonne wie auf der Erde)

5. Vereinheitlichung elektrischer und magnetischer Phänomene in der elektromagnetischen Theorie Maxwells[2]

[1] Galileo Galilei (1564-1648)
[2] James Clark Maxwell (1831-1879)

6. Vereinheitlichung der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung zur elektroschwachen Theorie im Rahmen des Standardmodells der Teilchenphysik

Erlangung physikalischer Erkenntnis durch Wechselspiel von Theorie und Experiment (Arbeitsteilung)

- **Experiment:** direkte Untersuchung physikalischer Phänomene, Überprüfung theoretischer Vorhersagen

- **Theorie:** Formulierung fundamentaler physikalischer Gesetze in mathematischer Form, Ableitung physikalischer Phänomene aus den Grundgesetzen, Vorhersagen

mathematische Sprache unerlässlich zur klaren Formulierung physikalischer Gesetzmäßigkeiten

zunächst unüberschaubare und verwirrende Vielzahl beobachteter Phänomene kann durch mathematische Methoden aus einigen wenigen Grundgleichungen hergeleitet werden (Strukturen und Gemeinsamkeiten werden erkennbar)

quantitative statt bloß qualitative Beschreibung

Vorhersagekraft einer Theorie bedeutet: im Prinzip durch Experiment widerlegbar

Kriterium für Gültigkeit einer Theorie: kein Widerspruch zum Experiment statt Anspruch auf absolute „Wahrheit“

Verhältnis von alter Theorie zu neuer (erweiterter) Theorie: alte Theorie nicht „falsch“, jedoch Einschränkung (Klärung) ihres Gültigkeitsbereichs (Beispiele: im Maschinenbau wird selbstverständlich auch heute nicht die relativistische Mechanik verwendet, da nichtrelativistische Mechanik weiterhin anwendbar, wenn Geschwindigkeiten $v \ll c$ sind; quantentheoretische Behandlung nicht sinnvoll, wenn alle vorkommenden Drehimpulse $L \gg \hbar$)

sukzessive Approximation statt „endgültiger“ Theorie

wichtiger Punkt: mathematische Konsistenz, Einfachheit und „Schönheit“ eines mathematischen Modells keine Garantie für tatsächliche Realisierung in der Natur
$\rightarrow$ **Experiment ist der oberste Richter in der Physik**

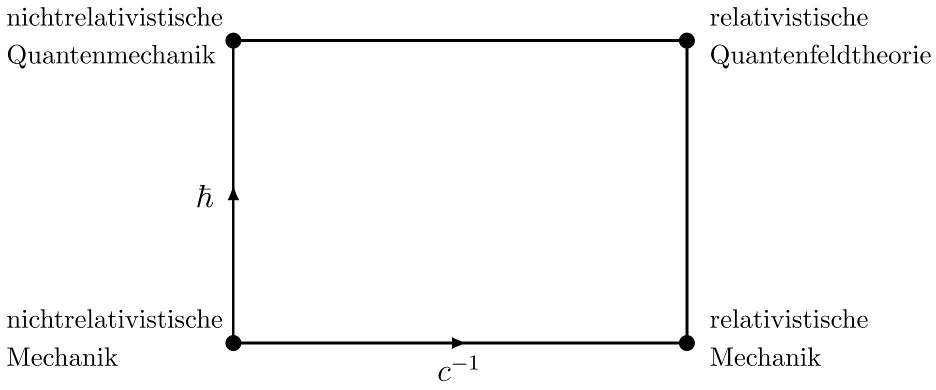


Abbildung 1.1: Im Limes $c \to \infty$ (unendlich große Signalgeschwindigkeit) gelangt man zur nichtrelativistischen Näherung und im Limes $\hbar \to 0$ zur klassischen Physik

1.2 Fundamentale Wechselwirkungen

alle bekannten physikalischen Phänomene können im Prinzip auf vier fundamentale Wechselwirkungen (Kräfte) zurückgeführt werden:

- Gravitation
- Elektromagnetismus
- starke Wechselwirkung
- schwache Wechselwirkung

Gravitation und Elektromagnetismus sind **makroskopische Wechselwirkungen** (mit großer Reichweite)

Gravitations- und Coulombkraft[3] zwischen zwei ruhenden Punktteilchen mit Massen $m_{1,2}$ und elektrischen Ladungen $q_{1,2}$, die sich an den Punkten $\vec{x}_{1,2}$ befinden:

$$\vec{F}_{12} = (-G_N m_1 m_2 + q_1 q_2)\frac{\vec{x_1} - \vec{x_2}}{|\vec{x_1} - \vec{x_2}|^3}$$

$\vec{F}_{12} (= -\vec{F}_{21})$ Kraft des 2. Teilchens auf das 1.

$G_N \simeq 6.7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}} \simeq 6.7 \times 10^{-39}\,\hbar c\,(\mathrm{GeV/c^2})^{-2} \ldots$ Newtonsche Gravitationskonstante

[3]Charles Augustin de Coulomb (1736-1806)

Massen stets positiv $\Rightarrow$ Gravitationskraft immer anziehend

Ladungen mit beiden Vorzeichen $\Rightarrow$ Coulombkraft anziehend für $q_1 q_2 < 0$, abstoßend für $q_1 q_2 > 0$

Vergleich von Gravitations- und Coulombkraft für zwei Protonen:

$m_p \simeq 938\,\mathrm{MeV/c^2}$, $\quad q_p = e$ (Elementarladung)

$$\frac{|\vec{F}_{\mathrm{Coulomb}}|}{|\vec{F}_{\mathrm{Gravitation}}|} = \frac{e^2}{G_N m_p^2} = \underbrace{\frac{e^2}{\hbar c}}_{\alpha} \frac{\hbar c}{G_N m_p^2}$$

$\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137\ldots$ (Sommerfeldsche) Feinstrukturkonstante

$$\Rightarrow \frac{|\vec{F}_{\mathrm{Coulomb}}|}{|\vec{F}_{\mathrm{Gravitation}}|} \simeq 10^{36} \left(\frac{\mathrm{GeV}}{m_p c^2}\right)^2$$

$\Rightarrow$ positive und negative Ladungen kompensieren einander in makroskopischen Körpern offensichtlich äußerst genau

$\Rightarrow$ im atomaren Bereich ($\sim 10^{-10}\,\mathrm{m}$) nur elektromagnetische Wechselwirkung relevant (Gravitation völlig vernachlässigbar) $\rightarrow$ Struktur der Atome, Moleküle, Festkörper durch Quantentheorie der elektromagnetischen Wechselwirkung bestimmt

Bereich der **klassischen Physik**: physikalische Größen von der Dimension eines Drehimpulses $\gg \hbar = h/2\pi \simeq 1.055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \simeq 6.58 \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV\,s}$ ([reduzierte] Plancksche Konstante) $\rightarrow$ quantentheoretische Effekte vernachlässigbar, gleichbedeutend mit $\hbar \rightarrow 0$

Quantentheorie relevant für elektromagnetische Wechselwirkung in Atomen (Distanzen $\sim 10^{-10}\,\mathrm{m}$)

starke Wechselwirkung: hält Atomkerne zusammen (gegen Coulombabstoßung der Protonen), Reichweite $\sim 10^{-15}\,\mathrm{m}$

schwache Wechselwirkung: noch kürzere Reichweite ($\sim 10^{-18}\,\mathrm{m}$), verantwortlich z.B. für den β-Zerfall ($n \rightarrow p e^- \overline{\nu}_e$)

für starke und schwache Wechselwirkung Limes $\hbar \rightarrow 0$ nicht sinnvoll (quantentheoretische Behandlung wesentlich)

volle quantentheoretische Behandlung der fundamentalen Wechselwirkungen durch (relativistische) **Quantenfeldtheorien** (QFT)

elektromagnetische Wechselwirkung beschrieben durch **Quantenelektrodynamik** (QED); elektromagnetische Kräfte zwischen geladenen Elementarteilchen

(Elektronen, Positronen, Quarks, ...) erklärt durch den Austausch von (virtuellen) Photonen (masselos, Helizität 1)

analog: starke Wechselwirkung in der **Quantenchromodynamik** (QCD) durch Austausch von 8 „Gluonen" (masselos, Helizität 1) zwischen Quarks (elementare Bausteine der Nukleonen) erklärt

Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung: $W^{\pm}, Z^0$-Bosonen (massiv, Spin 1); schwache Wechselwirkung im Standardmodell der Teilchenphysik mit der elektromagnetischen Wechselwirkung zur **elektroschwachenWechselwirkung** vereinheitlicht

Newtonsche **Gravitationstheorie** von Albert Einstein[4] zur **Allgemeinen Relativitätstheorie** weiterentwickelt (erklärt Periheldrehung des Merkur, Lichtablenkung an der Sonne, Beschreibung schwarzer Löcher, Vorhersage von Gravitationsstrahlung, ...); derzeit noch keine etablierte Quantentheorie der Gravitation (aktuelles Forschungsgebiet); Gravitationsquant: Graviton (masselos, Helizität 2)

wesentlich: Erklärung von Wechselwirkungen (Kräften) durch Teilchenaustausch in relativistischer QFT (Reduktion des Kraftbegriffs auf den Teilchenbegriff)

Teilchen können auf zweifache Weise in Erscheinung treten:

- **reelle** Teilchen (erfüllen die relativistische Energie-Impuls-Beziehung); in Detektoren (Teilchendetektoren, menschliches Auge für Photonen des sichtbaren Lichts, ...) nachweisbar
- **virtuelle** Teilchen (verletzen Energie-Impuls-Beziehung) $\rightarrow$ Kraftwirkung (Wechselwirkung)

Zusammenhang zwischen Massen M der Austauschteilchen und den typischen **Reichweiten** R der fundamentalen Wechselwirkungen:

$$R = \frac{\hbar}{Mc} = \frac{\hbar c}{Mc^2}, \quad \hbar c \simeq 197\,\mathrm{MeV\,fm}$$

- $m_\gamma = m_{\mathrm{Graviton}} = 0 \longrightarrow$ elektromagnetische und Gravitationswechselwirkung haben unendlich große Reicheite $\longrightarrow$ makroskopische Kräfte
- $M_W \simeq 80\,\mathrm{GeV}/c^2$, $M_Z \simeq 91\,\mathrm{GeV}/c^2 \longrightarrow R \sim 2 \times 10^{-18}\,\mathrm{m}$
- Sonderfall der starken Wechselwirkung: Austauschteilchen (Gluonen) sind zwar masselos, jedoch zusammen mit den Quarks in Hadronen (Mesonen, Nukleonen) eingeschlossen (**Confinement**) $\longrightarrow$ Wechselwirkung zwischen Hadronen (z.B. zwischen Protonen und Neutronen im Atomkern) analog zur Van-der-Waals-Wechselwirkung[5] durch Pionaustausch ($M_\pi \sim 140\,\mathrm{MeV}/c^2$) $\longrightarrow R \sim 10^{-15}\,\mathrm{m}$

[4]Albert Einstein (1879-1955)
[5]Johannes Diderik van der Waals (1837-1923)

Kapitel 2

Relativistische Mechanik

2.1 Spezielle Relativitätstheorie

Auffassung in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts:

Inertialsysteme bezüglich **mechanischer** Vorgänge gleichberechtigt; Zusammenhang zwischen Raum-Zeit-Koordinaten zweier Inertialsysteme durch geeignete Galileitransformation (unbeschleunigte Bewegung durch **mechanische** Experimente nicht feststellbar)

aber: **ausgezeichnetes** Bezugssystem bezüglich **elektromagnetischer** Vorgänge ≡ **Äther**; sollte für elektromagnetische Wellen die gleiche Rolle spielen wie elastisches Medium für Schallwellen

Erwartung: in relativ zum Äther bewegtem System (z.B. Erde) $\vec{c}' = \vec{c} + \vec{V}$ gemäß Galileitransformation; tatsächlicher **experimenteller** Befund: Lichtgeschwindigkeit in allen Richtungen gleich (Michelson[1], Morley[2], 1887)

$\longrightarrow$ Einstein (1905) „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“

Einsteinsches Relativitätsprinzip

(i) Naturgesetze sind in allen Inertialsystemen gleich (d.h. die entsprechenden Gleichungen haben dieselbe Form)

(ii) Lichtgeschwindigkeit c ist in allen Bezugssystemen gleich groß

[1] Albert Abraham Michelson (1852-1931)
[2] Edward Williams Morley (1838-1923)

heute: Grundlage alltäglicher technischer Anwendungen (GPS, Teilchenbeschleuniger, etc.)

Grund für den eingeschränkten Gültigkeitsbereich der Newtonschen (nichtrelativistischen) Mechanik: implizite Annahme einer unendlich schnellen Wirkungsausbreitung (z.B. potentielle Energie als Funktion räumlich getrennter Teilchenkoordinaten zu ein und demselben Zeitpunkt!)

tatsächlich: Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung (= Lichtgeschwindigkeit) **endlich**

$$\boxed{c = 2.997\,924\,58 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

wissen nun: Galileitransformation nur für Relativgeschwindigkeit $V \ll c$ (näherungsweise) richtig $\longrightarrow$ wie ist der Zusammenhang zwischen den Raum-Zeit-Koordinaten zweier Inertialsysteme unter Berücksichtigung des Einsteinschen Relativitätsprinzips?

Annahme einer **absoluten** Zeit ($dt' = dt$ bei Galileitransformation) offensichtlich in völligem Widerspruch zum Einsteinschen Relativitätsprinzip:

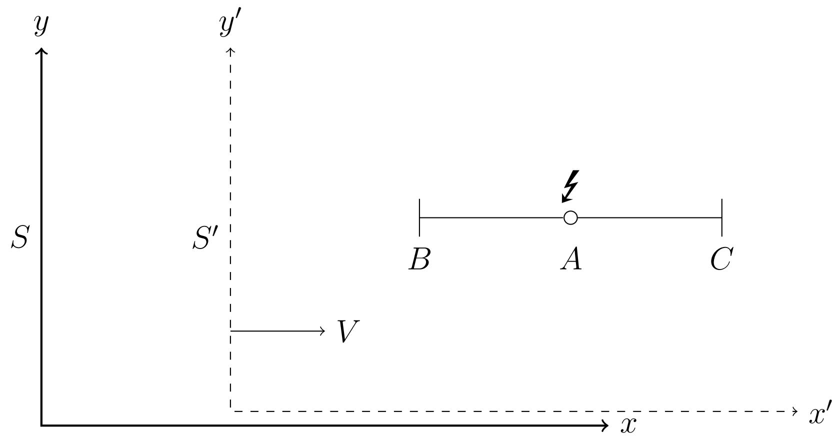


Abbildung 2.1: Inertialsystem S' bewegt sich mit Geschwindigkeit V relativ zu Inertialsystem S; BAC ruht in S'

vom Inertialsystem S' aus betrachtet kommt das Licht **gleichzeitig** in B und C an $\longrightarrow$ diese zwei Ereignisse sind aber im System S **nicht** gleichzeitig! (vom System S aus betrachtet kommt das Licht früher bei B an als bei C)

$\longrightarrow$ Gleichzeitigkeit an **verschiedenen** Orten hängt vom Bezugssystem ab! (Relativität der Gleichzeitigkeit)

wie muss man die Galileitransformation **modifizieren**, sodass der Tatsache Rechnung getragen wird, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen gleich groß ist?

beschränken uns zunächst auf **infinitesimale** Relativgeschwindigkeit $\vec{V}$ ($\longrightarrow$ nur Terme **linear** in $\vec{V}$ zu berücksichtigen)

Ansatz:

$$t' = t - a\vec{V} \cdot \vec{x}, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{V}t$$

lege x-Achse in Richtung von $\vec{V}$: $\vec{V} = V\vec{e}_x$

$$t' = t - aVx, \quad x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z$$

wie muss man a wählen, damit ein Lichtsignal im System S auch im System S' ein Lichtsignal bleibt?

Gleichung eines Lichtsignals in S z.B.:

$$x = ct, \quad y = 0, \quad z = 0$$

welche Gleichung hat dieses Lichtsignal im System S'?

$$t' = t - aVct = (1 - aVc)t, \quad x' = ct - Vt$$

$$\Rightarrow x' = (c - V)t = \frac{c - V}{1 - aVc} t' \overset{\text{soll}}{=} ct' \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{c^2}$$

$\longrightarrow$ infinitesimale **Lorentztransformation**[3]

$$t' = t - Vx/c^2, \quad x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z$$

Matrixschreibweise für infinitesimale Lorentztransformation:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -V/c & 0 & 0 \\ -V/c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

- ct hat die Dimension einer Länge
- wir hätten uns natürlich nicht auf ein Lichtsignal längs der x-Achse beschränken müssen, sondern wir hätten von der Gleichung des Lichtsignals

  $$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

  ausgehen können:

  $$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 &= (x - Vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2(t - aVx)^2 \\ &= 2xVt(ac^2 - 1) + \mathcal{O}(V^2) \overset{\text{soll}}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1/c^2 \end{aligned}$$

[3]Hendrik Antoon Lorentz (1853 - 1928)

wie schaut nun eine **endliche** Lorentztransformation aus?

wende dazu n Lorentztransformationen mit **infinitesimaler** Relativgeschwindigkeit $\psi c/n$ hintereinander an und mache dann den Limes $n \to \infty$, wobei der Parameter ψ **konstant** gehalten wird

infinitesimale Transformation:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \left(\mathbb{1} - \frac{\psi}{n}\mathrm{I}\right)\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ endliche Transformation:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{1} - \frac{\psi}{n}\mathrm{I}\right)^n = e^{-\psi\mathrm{I}}$$

Potenzreihenentwicklung:

$$e^{-\psi\mathrm{I}} = \mathbb{1} - \psi\mathrm{I} + \frac{1}{2!}\psi^2\mathrm{I}^2 - \frac{1}{3!}\psi^3\mathrm{I}^3 + \dots$$

wegen $\mathrm{I}^2 = \mathbb{1}$ erhält man:

$$e^{-\psi\mathrm{I}} = \mathbb{1}\cosh\psi - \mathrm{I}\sinh\psi = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ endliche Lorentztransformation

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi & 0 & 0 \\ -\sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zusammenhang der **Rapidität** ψ mit der Relativgeschwindigkeit V der beiden Inertialsysteme?

betrachten Bewegung des Ursprungs von S' (Koordinaten $x' = y' = z' = 0$) vom System S aus:

$$-\sinh\psi\, ct + \cosh\psi\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \underbrace{\tanh\psi\, c}_{V}\, t \quad \Rightarrow \quad \tanh\psi = V/c$$

$$\Rightarrow \sinh\psi = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

folgende Bezeichnungen sind üblich:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \beta = V/c$$

für unsere Lorentztransformation erhält man daher

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

bzw.

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

einige Konsequenzen der Lorentztransformation:

1. **Zeitdilatation**

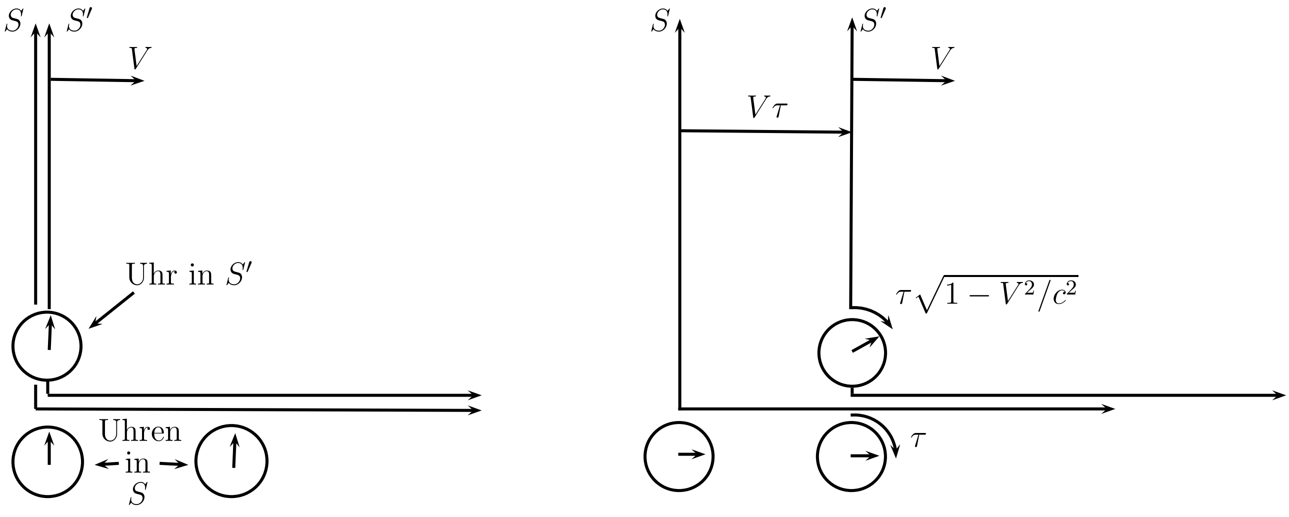


Abbildung 2.2: Zeitdilatation

$$t = x = y = z = 0 \quad \longrightarrow \quad t' = x' = y' = z' = 0$$

$$\begin{array}{c} t = \tau \\ x = V\tau \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} t' = \tau\sqrt{1 - V^2/c^2} \\ x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{array}$$

anschauliche Interpretation $\longrightarrow$ **Gedankenexperiment**

verwenden folgende „Lichtuhr“ ($\longrightarrow$ Feynman Bd. I)

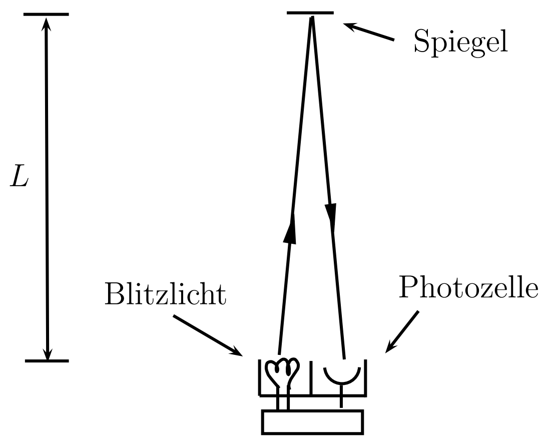


Abbildung 2.3: Lichtuhr

Uhr ruht in S', von S aus gesehen schaut der Weg des Lichtstrahls so aus:

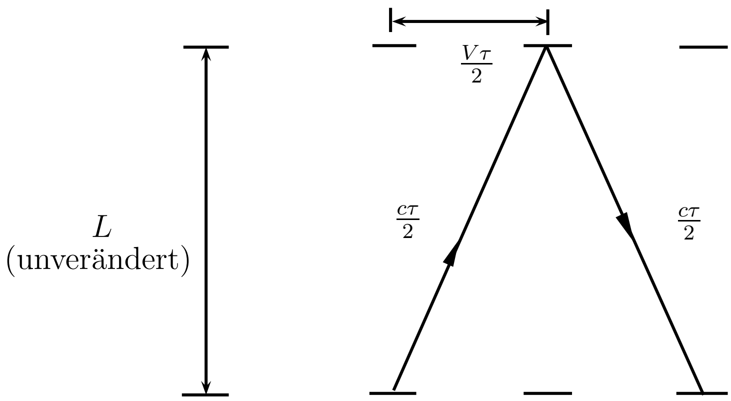


Abbildung 2.4: Bewegte Lichtuhr

Beobachter in S' misst die Zeit $\tau' = 2L/c$

Beobachter in S misst die Zeit τ

Zusammenhang zwischen τ' und τ:

$$\left(\frac{c\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{V\tau}{2}\right)^2 + L^2 = \left(\frac{V\tau}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\tau'}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \tau'^2 = \tau^2\,(1 - V^2/c^2) \quad \Rightarrow \quad \tau' = \tau\,\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

2. **Lorentzkontraktion**

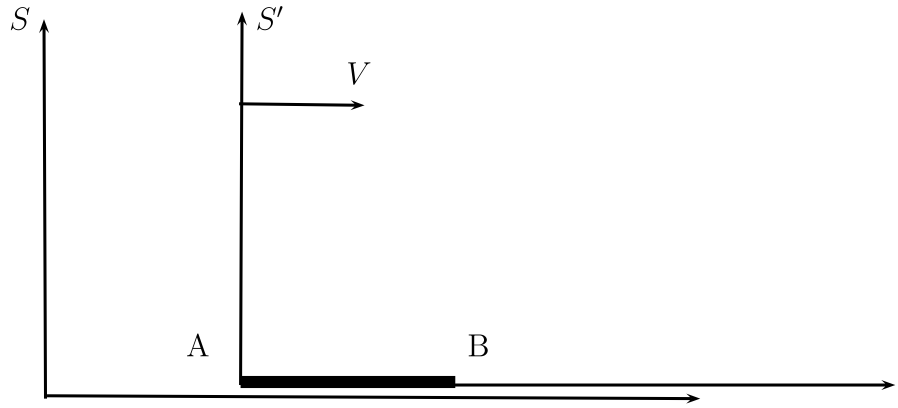


Abbildung 2.5: Stab AB ruht in S'

Stab der Länge L, der in System S' (in x'-Richtung liegend) ruht; Enden des Stabes seien bei $x'_A = 0$ und $x'_B = L$

betrachte nun den Stab vom System S aus $\longrightarrow$ bewegt sich mit Geschwindigkeit V

linker Endpunkt (A): $x'_A = 0 \longrightarrow x_A = Vt$

rechter Endpunkt (B):

$$x'_B = L \longrightarrow L = \frac{x_B - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \Rightarrow x_B = L\sqrt{1 - V^2/c^2} + Vt$$

$$\Rightarrow \quad L_0 := x_B - x_A = L\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

bewegter Stab erscheint verkürzt

geometrische Methode zur Ermittlung der Lorentzkontraktion:

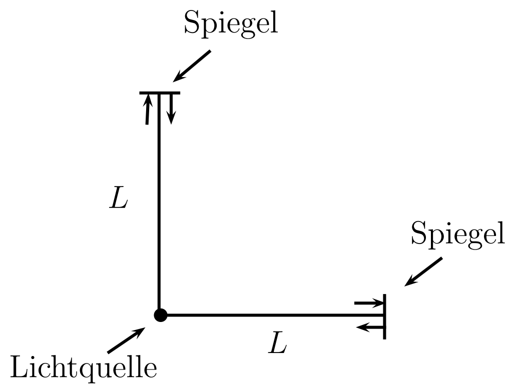


Abbildung 2.6: Modifizierte, in S' ruhende Lichtuhr

vom System S aus gesehen, ergibt sich folgendes Bild:

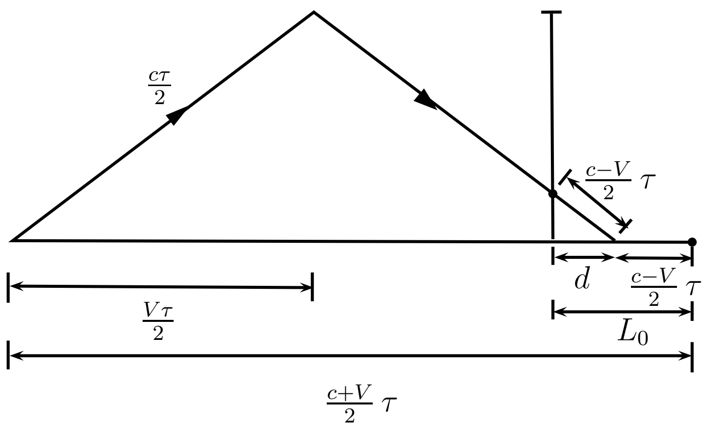


Abbildung 2.7: Bewegte Lichtuhr vom System S aus gesehen. Die Abbildung zeigt die Lichtuhr in jenem Augenblick, in dem das sich horizontal bewegende Photon gerade am rechten Spiegel reflektiert wird

$$\left(\frac{c\tau}{2}\right)^2 = \left(\frac{V\tau}{2}\right)^2 + L^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau}{2} = \frac{L}{c\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

$$\frac{(c-V)\tau/2}{c\tau/2} = \frac{d}{V\tau/2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{V}{c}\,\frac{c-V}{2}\,\tau$$

$$L_0 = \frac{c-V}{2}\,\tau + d = \frac{c-V}{2}\,\tau\,(1+V/c) = L\sqrt{1-V^2/c^2}$$

3. **Transformation der Geschwindigkeit**

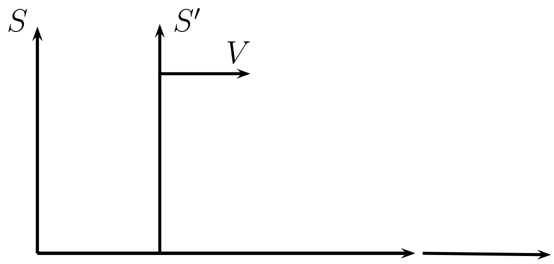


Abbildung 2.8: System S' bewegt sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit V

Teilchen mit Geschwindigkeit $\vec{v} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$ im System S

$\rightarrow$ Geschwindigkeit $\vec{v}\,' = \dfrac{d\vec{x}\,'}{dt'}$ im System S'

Zusammenhang zwischen $\vec{v}$ und $\vec{v}\,'$?

$$dt' = \frac{dt - V\,dx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dx' = \frac{dx - V\,dt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V\,dt}{dt - V\,dx/c^2} = \frac{v_x - V}{1 - V v_x/c^2} \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\,\sqrt{1 - V^2/c^2}}{dt - V\,dx/c^2} = \frac{v_y\,\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V v_x/c^2} \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z\,\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V v_x/c^2} \end{aligned}$$

Bemerkung: für $c \to \infty$ erhält man die Transformationsformeln der nicht-relativistischen Mechanik:

$$v'_x = v_x - V, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z$$

relativistische Transformationsformel für **Betrag** der Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \vec{v}'^2 &= v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z \\ &= \frac{(v_x - V)^2 + (v_y^2 + v_z^2)(1 - V^2/c^2)}{(1 - V v_x/c^2)^2} \\ &= \frac{\vec{v}^2 - 2V v_x + V^2 - (v_y^2 + v_z^2)(V^2/c^2)}{(1 - V v_x/c^2)^2} \end{aligned}$$

2.2 Raum-Zeit

für den Spezialfall, dass sich System S' relativ zu System S mit Geschwindigkeit V in Richtung der (positiven) x-Achse bewegt, hatten wir Lorentztransformation der Form

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi & 0 & 0 \\ -\sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

wodurch kann im **allgemeinen** Fall eine Lorentztransformation charakterisiert werden?

Beobachtung: obige Transformation hat die Eigenschaft

$$(ct')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

das ist auch die gesuchte Charakterisierung einer allgemeinen Lorentztransformation (Analogie zu räumlichen Drehungen!)

ein Ereignis in der **Raum-Zeit** (ein Raum-Zeit-Punkt) wird durch die Raum-Zeit-Koordinaten $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x})$ gekennzeichnet

Bemerkung: Menge der Ereignisse (Raum-Zeit-Punkte) wird in der speziellen Relativitätstheorie auch als **Minkowskiraum**[4] bezeichnet

die Komponenten von x werden mit x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ bezeichnet

für räumliche Indizes werden lateinische Buchstaben verwendet: x^i $(i = 1, 2, 3)$

die Größe $s^2 = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y}\,)^2$ heißt **Viererabstand** (Raum-Zeit-Abstand) der beiden Ereignisse $x = (x^0, \vec{x})$ und $y = (y^0, \vec{y}\,)$

der Viererabstand zweier Ereignisse hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert (s^2 ist eine **Invariante**)

andere Schreibweise: $s^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu - y^\mu)(x^\nu - y^\nu)$ (Summenkonvention!) mit dem **metrischen Tensor** $g = (g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$

Raum-Zeit-Diagramm:

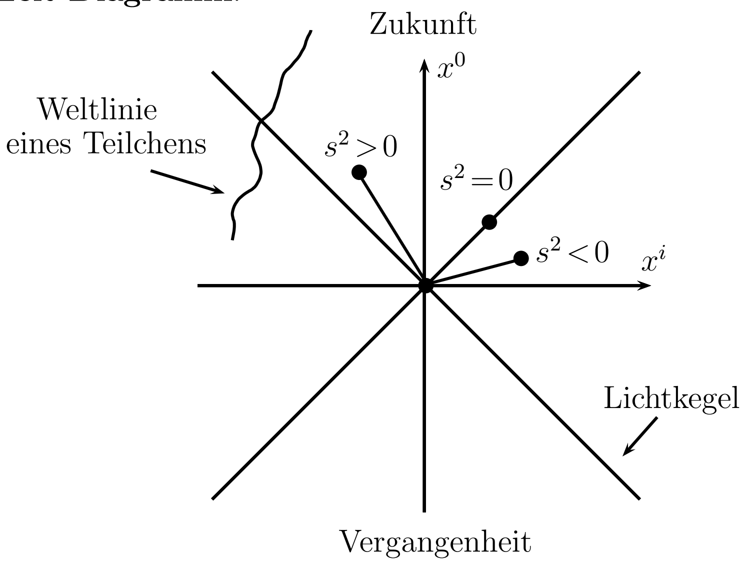


Abbildung 2.9: Raum-Zeit-Diagramm

$s^2 > 0 \ldots$ **zeitartiger** Abstand: kausale Verknüpfung möglich (es gibt ein Bezugssystem, in dem die beiden Ereignisse am selben Ort stattfinden)

$s^2 = 0 \ldots$ **lichtartiger** Abstand (Ereignisse können durch Lichtsignal verknüpft werden)

[4]Hermann Minkowski (1864-1909)

$s^2 < 0 \ldots$ **raumartiger** Abstand: kausale Verknüpfung unmöglich (es gibt ein Bezugssystem, in dem beide Ereignisse gleichzeitig stattfinden)

Poincarétransformation[5]

Umrechnung der Raum-Zeit-Koordinaten $x = (x^0, \vec{x})$ eines Ereignisses bezüglich Inertialsystem S in die Raum-Zeit-Koordinaten $x' = (x^{0\prime}, \vec{x}\,')$ des selben Ereignisses bezüglich S' erfolgt durch Poincarétransformation

$$x^{\mu\prime} = L^\mu_{\ \nu} x^\nu + a^\mu \quad \text{(Summenkonvention!)}$$

a^μ ist beliebig, beschreibt lediglich eine konstante Verschiebung des Zeitnullpunktes bzw. des Koordinatenursprungs

$L^\mu_{\ \nu}$ ist dadurch eingeschränkt, dass der Viererabstand zweier beliebiger Ereignisse eine Invariante ist:

$$\begin{aligned} s^2 &= g_{\mu\nu}(x^{\mu\prime} - y^{\mu\prime})(x^{\nu\prime} - y^{\nu\prime}) \\ &= g_{\mu\nu} L^\mu_{\ \alpha}(x^\alpha - y^\alpha) L^\nu_{\ \beta}(x^\beta - y^\beta) \\ &= g_{\alpha\beta}(x^\alpha - y^\alpha)(x^\beta - y^\beta) \end{aligned}$$

$x - y$ beliebig $\Rightarrow L^\mu_{\ \alpha} g_{\mu\nu} L^\nu_{\ \beta} = g_{\alpha\beta}$

in Matrixschreibweise $L = (L^\mu_{\ \nu})$: $L^T g L = g$

Bemerkungen:

- Analogie zu orthogonalen Transformationen ($R^T R = \mathbb{1}$)
- eine Poincarétransformation mit $a^\mu = 0$ heißt Lorentztransformation

2.3 Lorentz- und Poincarégruppe

Menge aller Lorentztransformationen (also die Menge aller reellen 4×4 Matrizen L mit der Eigenschaft $L^T g L = g$) bildet eine Gruppe $\longrightarrow$ **Lorentzgruppe** $\mathcal{L} = \mathrm{O}(3, 1)$

bekannte Untergruppe gebildet aus Matrizen der Form

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad R \in \mathrm{O}(3)$$

[5]Jules **Henri** Poincaré (1854-1912)

wir wissen: orthogonale Gruppe O(3) zerfällt in zwei nicht miteinander verbundene Teile (2 Zusammenhangskomponenten): $\mathrm{O}(3) = \mathrm{SO}(3) \cup \Pi\, \mathrm{SO}(3)$ ($\Pi = -\mathbb{1}_3$, $\det \Pi = -1$)

$\det R = 1 \ldots$ Drehungen, Gruppe SO(3)

$\det R = -1 \ldots$ Drehspiegelungen, keine Gruppe

Lorentzgruppe $\mathrm{O}(3,1)$: 4 Zusammenhangskomponenenten

$$L^T g L = g \;\Rightarrow\; \det L^T \underbrace{\det g}_{-1} \det L = \underbrace{\det g}_{-1} \;\Rightarrow\; (\det L)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \det L = \pm 1$$

$$(L^T g L)_{00} = g_{00} = 1 = g_{\mu\nu} L^\mu{}_0 L^\nu{}_0 = (L^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (L^i{}_0)^2 \;\Rightarrow\; (L^0{}_0)^2 \geq 1$$
$$\Rightarrow\; L^0{}_0 \text{ entweder } \;\geq 1 \text{ oder } \;\leq -1$$

Zusammenhangskomponente	$\det L$	$\operatorname{sgn} L^0{}_0$	$\in$
$\mathcal{L}_+^\uparrow$	1	1	$\mathbb{1}_4$
$\mathcal{L}_-^\uparrow$	-1	1	P
$\mathcal{L}_+^\downarrow$	1	-1	PT
$\mathcal{L}_-^\downarrow$	-1	-1	T

Raumspiegelung:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det P = -1,\; P^0{}_0 = 1$$

Zeitumkehr:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det T = -1,\; T^0{}_0 = -1$$

$\mathcal{L}_+^\uparrow \ldots$ Untergruppe der **eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen**

Beispiel: spezielle Lorentztransformation (reine Geschwindigkeitstransformation) in x-Richtung:

$$L = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi & 0 & 0 \\ -\sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det L = \cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$, $L^0_{\ 0} = \cosh\psi \geq 1$

allgemeines Element $L(\vec{\alpha}, \vec{V}) \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ kann durch 6 reelle Größen parametrisiert werden (Drehwinkel $\vec{\alpha}$ und Geschwindigkeit $\vec{V}$); die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe ist eine sechsparametrige **Liegruppe**[6]

$$L(\vec{0}, \vec{V}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{V}^T/c \\ -\gamma\vec{V}/c & \mathbb{1}_3 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\vec{V}\vec{V}^T/c^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{V}^2/c^2}}$$

$$L(\vec{\alpha}, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & D(\vec{\alpha}) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad D(\vec{\alpha}) \in \mathrm{SO}(3)$$

jedes Element aus $\mathcal{L}_+^\uparrow$ lässt sich in der Form $L(\vec{\alpha}, \vec{V}) = L(\vec{\alpha}, \vec{0})L(\vec{0}, \vec{V})$ schreiben

$\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup PT\mathcal{L}_+^\uparrow \ldots$ eigentliche Lorentzgruppe

$\mathcal{L}^\uparrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup P\mathcal{L}_+^\uparrow \ldots$ orthochrone Lorentzgruppe

$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\downarrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup T\mathcal{L}_+^\uparrow \ldots$ orthochore Lorentzgruppe

$\mathcal{L}_-^\uparrow$, $\mathcal{L}_+^\downarrow$, $\mathcal{L}_-^\downarrow$ sind **keine** Gruppen (nur $\mathcal{L}_+^\uparrow$ enthält das Einheitselement)

Bemerkung: nur die eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen können stetig mit der Einheit verbunden werden

Poincarétransformationen (L, a) bestehen aus einer Lorentztransformation L und einer Raum-Zeit-Translationen a^μ; sie bilden die **Poincarégruppe** $\mathcal{P}$

Bemerkung: wieder ist die Zerlegung in $\mathcal{P}_+^\uparrow$, $\mathcal{P}_-^\uparrow$, $\mathcal{P}_+^\downarrow$, $\mathcal{P}_-^\downarrow$ möglich

alle fundamentalen Wechselwirkungen respektieren $\mathcal{P}_+^\uparrow$; schwache Wechselwirkung **verletzt** P und T; starke und elektromagnetische Wechselwirkungen sind invariant unter der gesamten Poincarégruppe $\mathcal{P}$

[6]Sophus Lie (1842-1899)

Bemerkungen:

- $\mathcal{P}_+^\uparrow$ beschreibt alle möglichen Transformationen von einem Inertialsystem in ein anderes
- $\mathcal{P}_+^\uparrow$ hat 10 Parameter $(\vec{\alpha}, \vec{V}, a^\mu) \longrightarrow$ 10 Erhaltungsgrößen (wie bei Galilei-invarianz)

2.4 Eigenzeit

betrachten infinitesimal benachbarte Ereignisse, die bezüglich Inertialsystem S durch die Raum-Zeit-Koordinaten

$$x = (x^0, \vec{x}), \quad (x^0 + dx^0, \vec{x} + d\vec{x})$$

beschrieben werden $\longrightarrow$ Viererabstand zwischen diesen beiden Ereignissen:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^{\,2} = \text{ inv.}$$

betrachten **beliebig** bewegte Uhr (d.h. i. Allg. beschleunigt relativ zu S)

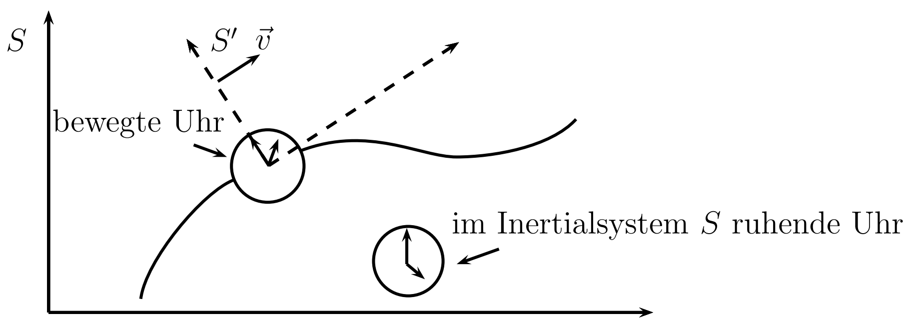


Abbildung 2.10: Beliebig bewegte Uhr

S' sei jenes Inertialsystem, in dem die Uhr in dem betrachteten Augenblick gerade ruht

$\Rightarrow d\vec{x}\,' = 0$

$\Rightarrow ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^{\,2} = c^2 dt'^2$

$\Rightarrow dt' = dt\sqrt{1 - \dfrac{d\vec{x}^{\,2}}{c^2 dt^2}}$

Zusammenhang zwischen Zeitintervall dt' auf der bewegten Uhr und Zeitintervall dt auf einer Uhr, die im Inertialsystem S ruht:

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

somit ist

$$t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \underbrace{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}}_{\leq 1}$$

jenes Zeitintervall, das die (beschleunigt) bewegte Uhr anzeigt, wenn die im Inertialsystem S ruhende Uhr das Zeitintervall $t_2 - t_1$ vergangen ist

$t_2' - t_1'$ bezeichnet man als **Eigenzeit**(intervall) der bewegten Uhr

Eigenzeitintervall ist immer **kleiner** als das entsprechende Zeitintervall im Inertialsystem (m.a.W.: Uhr im Nichtinertialsystem geht **langsamer** als Uhr im Inertialsystem)

Beispiel für experimentellen Nachweis:

mittlere Lebensdauer eines Myons: $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$; dominanter Zerfallskanal: $\mu^+ \to e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ (bzw. $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$)

Myonen werden in höheren Schichten der Atmosphäre erzeugt (Produktion durch Zerfall geladener Pionen: $\pi^\pm \to \mu^\pm \overset{(-)}{\nu_\mu}$)

$\longrightarrow$ **naive** Erwartung: Myonen sollten nach einer mittleren Flugstrecke von $v\tau_\mu < c\tau_\mu \simeq 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}} \times 2.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} = 660\,\mathrm{m}$ zerfallen sein (genauer: ursprüngliche Anzahl auf den e-ten Teil vermindert); **tatsächlich** erreichen Myonen die Erdoberfläche, die in mehreren km Höhe erzeugt wurden

korrekte Analyse: τ_μ ist die mittlere Lebensdauer im **Ruhesystem** des Myons

$\longrightarrow$ mittlere Wegstrecke im System des Beobachters $= \dfrac{c\tau_\mu}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} = c\tau_\mu \gamma \gg c\tau_\mu$

Messung des anomalen magnetischen Moments des Myons:

Myon-Speicherring (Brookhaven National Laboratories): Myonen durch Magnetfeld von $1.45\,\mathrm{T}$ auf Kreisbahn mit Radius $R = 14\,\mathrm{m}$ gehalten

$v \simeq 0.99942\,c \Rightarrow \gamma = 29.3$

$v\tau_\mu \simeq c\tau_\mu = 660\,\mathrm{m}$

$\longrightarrow$ naive Erwartung: Myon sollte im Mittel nach $n = \dfrac{660\,\mathrm{m}}{2\pi R} = 7.5$ Runden zerfallen sein

tatsächlich fliegen Myonen im Mittel $N = n\gamma = \dfrac{7.5}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 220$ Runden vor dem Zerfall $\to$ sehr genaue Bestätigung des γ-Faktors

Bemerkung: $v = 0.999\,c$ würde 168 Runden ergeben $\longrightarrow$ sehr präziser Test für die spezielle Relativitätstheorie

$\longrightarrow$ Version des **Zwillingsparadoxons**: Vergleichsprobe von Myonen in Ruhe sind im Mittel bereits nach der Zeit τ_μ zerfallen, während die beschleunigten Myonen im Mittel $\gamma\tau_\mu$ leben (also 29.3 mal so lang)

Bemerkung: natürlich **keineswegs** „paradox“, da kreisende Myonen kein Inertialsystem definieren!

2.5 Vierervektoren, Tensoren

Prototyp (der Komponenten) eines **kontravarianten Vierervektors**: Koordinatendifferentiale

$$dx^0 = c\,dt,\ dx^1 = dx,\ dx^2 = dy,\ dx^3 = dz$$

$$dx^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

Transformationsverhalten bei Übergang auf anderes Inertialsystem (Poincarétransformation):

$$x^{\mu\prime} = L^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad \Rightarrow \quad dx^{\mu\prime} = L^\mu_\nu dx^\nu$$

allgemein bezeichnet man A^μ als kontravarianten Vierervektor (genauer: Komponenten eines kontravarianten Vierervektors), falls

$$A^{\mu\prime} = L^\mu_\nu A^\nu$$

bei obiger Poincarétransformation („transformiert wie dx^μ“)

$$\Rightarrow \quad (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 = \text{inv.}$$

kovarianter Vierervektor: $A_\mu := g_{\mu\nu} A^\nu$

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}), \quad A_\mu = (A^0, -\vec{A})$$

z.B.

$$dx^\mu = (c\,dt, d\vec{x}), \quad dx_\mu = (c\,dt, -d\vec{x})$$

$$A^\mu \underbrace{g_{\mu\nu} A^\nu}_{A_\mu} = A^\mu A_\mu =: A \cdot A =: A^2$$

A^μ, B^μ Vierervektoren $\longrightarrow$ **4-Skalarprodukt** $A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu =: A \cdot B$ ist eine Invariante (4-Skalar), d.h.

$$A' \cdot B' = A \cdot B$$

das Inverse g^{-1} des metrischen Tensors g ist (in der flachen Raum-Zeit)

$$g^{-1} = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$$

wobei δ^μ_ν das Kroneckersymbol ist:

$$\mathbb{1} = (\delta^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von $g^{\mu\nu}$ kann man aus einem kovarianten Tensor wieder einen kontravarianten Tensor machen:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$$

Tensoren:

das Produkt $A^\mu B^\nu$ zweier kontravarianter Vierervektoren hat das Transformationsverhalten

$$A^{\mu\prime} B^{\nu\prime} = L^\mu_{\ \alpha} A^\alpha L^\nu_{\ \beta} B^\beta = L^\mu_{\ \alpha} L^\nu_{\ \beta} A^\alpha B^\beta$$

allgemein bezeichnet man ein Objekt $T^{\mu\nu}$ mit dem Transformationsverhalten

$$T^{\mu\nu\prime} = L^\mu_{\ \alpha} L^\nu_{\ \beta} T^{\alpha\beta}$$

als Vierertensor (kontravarianter 4-Tensor zweiter Stufe)

durch Überschieben mit dem metrischen Tensor kann man auch den gemischten Tensor

$$T_\mu^{\ \nu} = g_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu}$$

sowie den kovarianten Tensor

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}$$

bilden

die Verallgemeinerung des Konzepts auf mehrstufige Tensoren ist offensichtlich

durch Überschieben beider Indizes von T_μ^ν erhält man den 4-Skalar T_μ^μ

ist $T^{\mu\nu}$ ein Tensor und A^μ ein Vektor, so ist $T^{\mu\nu}A_\nu$ ein (kontravarianter) Vektor, etc.

metrischer Tensor ist ein **invarianter** Tensor zweiter Stufe mit kovarianten Komponenten $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu}L^\mu_{\ \alpha}L^\nu_{\ \beta} = g_{\alpha\beta}$$

einfachster Tensor: **Skalar** (Tensor nullter Stufe) ist invariant unter Lorentztransformationen

Beispiele für Skalare:

- Masse m
- Ladung q
- Skalarprodukt zweier Vierervektoren
- vierdimensionales Volumselement $d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 = c\,dt\,dx\,dy\,dz$

$$d^4x' = \left|\det\underbrace{\left(\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\nu}\right)}_{L^\mu_{\ \nu}}\right| d^4x = d^4x \quad (\text{wegen } |\det L| = 1)$$

- invariantes Linienelement $ds^2 = (c\,dt)^2 - (d\vec{x})^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu$

Definition des vierdimensionalen **Epsilontensors**:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu\nu\rho\sigma \text{ gerade Permutation von 0123} \\ -1 & \text{falls } \mu\nu\rho\sigma \text{ ungerade Permutation von 0123} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ε-Tensor ist ein invarianter Pseudotensor:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}L^\mu_{\ \alpha}L^\nu_{\ \beta}L^\rho_{\ \gamma}L^\sigma_{\ \delta} = \det L\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

dreht bei uneigentlichen Lorentztransformationen das Vorzeichen um (wie dreidimensionaler Epsilontensor bei Drehspiegelungen)

Quotiententheorem:

werden später den folgenden Satz benötigen:

sei A^μ ein beliebig wählbarer kontravarianter 4-Vektor und $A^\mu B_\mu$ ein Skalar (d.h. ${A^\mu}' B'_\mu = A^\mu B_\mu$) $\Rightarrow$ B_μ ist ein kovarianter 4-Vektor

Beweis: laut Voraussetzung ist ${A^\mu}' = L^\mu_{\ \nu} A^\nu$ und ${A^\mu}' B'_\mu = A^\mu B_\mu$; in Matrixschreibweise lauten diese Relationen:

$$A' = LA \quad (\text{wobei } L^T g L = g) \quad \text{und} \quad A'^T g B' = A^T g B$$

$$\Rightarrow \quad A^T L^T g B' = A^T g B$$

da der Vektor A beliebig wählbar ist folgt:

$$\underbrace{L^T g}_{gL^{-1}} B' = gB$$

$$\Rightarrow \quad B' = LB, \text{ d.h. } {B^\mu}' = L^\mu_{\ \nu} B^\nu$$

m.a.W.: B^μ ist ein kontravarianter 4-Vektor und somit B_μ ein kovarianter 4-Vektor

2.6 Freies Teilchen

wollen die Lagrangefunktion (bzw. Wirkung) eines freien Teilchens in einem Inertialsystem finden (kennen L bis jetzt nur in nichtrelativistischer Näherung)

wissen bereits, dass die Lagrangefunktion wegen der Homogenität von Zeit und Raum und der Isotropie des Raumes nur eine Funktion des **Betrags** der Geschwindigkeit des Teilchens sein kann; zusätzlich muss die Wirkung beim Übergang von einem Inertialsystem auf ein anderes **invariant** bleiben

wir kennen aber bereits eine geeignete Invariante, nämlich ds:

$$\Rightarrow \quad S = -\alpha \int_1^2 ds, \quad \alpha > 0$$

Vorzeichen: $\int_1^2 ds$ maximal für **gerade** Weltlinie, denn $\int_1^2 ds/c$ ist ja gerade die Eigenzeit für die entsprechende Weltlinie zwischen den Raum-Zeitpunkten $1, 2$; in einem Inertialsystem (= gerade Weltlinie zwischen 1 und 2) ist aber die Eigenzeit

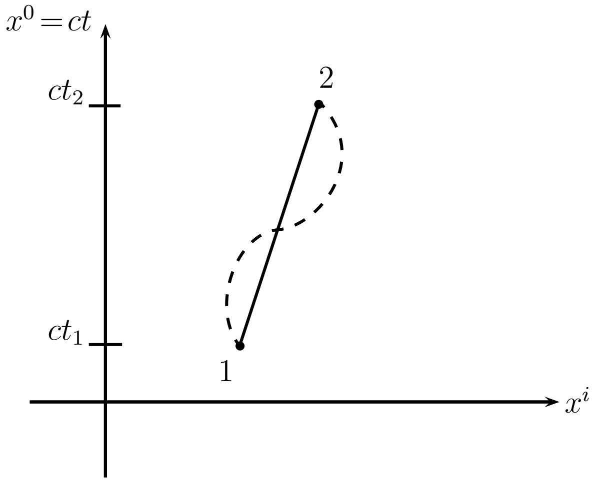


Abbildung 2.11: Variationsproblem zur Ermittlung der Weltlinie eines freien Teilchens in einem Inertialsystem

immer größer als in einem Nichtinertialsystem (gekrümmte Weltlinie zwischen 1 und 2)

wir wissen: $ds = c\,dt\sqrt{1 - \vec{v}(t)^2/c^2}$

$$\Rightarrow \quad S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \vec{v}(t)^2/c^2} \quad \Rightarrow \quad L = -\alpha c \sqrt{1 - \vec{v}^{\,2}/c^2}$$

α wird durch den nichtrelativistischen Grenzfall ($|\vec{v}|/c \ll 1$) festgelegt:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \vec{v}^{\,2}/c^2} \longrightarrow -\alpha c \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2} + \ldots\right)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = mc$$

$$\boxed{\begin{aligned} S &= -mc \int ds \\ L &= -mc^2 \sqrt{1 - \vec{v}^{\,2}/c^2} \end{aligned}}$$

die relativistischen Ausdrücke für **Energie** und **Impuls** eines freien Teilchens sind jetzt durch die üblichen Kochrezepte der Lagrangeschen Mechanik festgelegt:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^{\,2}/c^2}} \underset{v \ll c}{\longrightarrow} m\vec{v} + \ldots$$

$$E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \underset{v\ll c}{\longrightarrow} mc^2 + \frac{m\vec{v}^2}{2} + \ldots$$

Bemerkung: $E(\vec{v}=0) = mc^2$ wird als **Ruheenergie** des Teilchens bezeichnet

Zusammenhang zwischen Energie und Impuls:

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{1-\vec{v}^2/c^2}, \quad \vec{p}^2 = \frac{m^2\vec{v}^2}{1-\vec{v}^2/c^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E^2}{c^2} = \frac{m^2c^2}{1-\vec{v}^2/c^2} = \underbrace{\frac{m^2\vec{v}^2}{1-\vec{v}^2/c^2}}_{\vec{p}^2} + \underbrace{\frac{m^2(c^2-\vec{v}^2)}{1-\vec{v}^2/c^2}}_{m^2c^2}$$

relativistische Energie-Impuls-Beziehung:

$$\boxed{\frac{E^2}{c^2} = \vec{p}^2 + m^2c^2}$$

$$\Rightarrow \quad E = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2} \underset{|\vec{p}|\ll mc}{\longrightarrow} mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \ldots$$

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E}$$

$m \neq 0 \Rightarrow \vec{p}$ und E werden für $v = c$ unendlich groß $\longrightarrow$ Teilchen mit nicht verschwindender Masse können sich nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegen

$m = 0$ (z.B. Photon):

$$E = c|\vec{p}| \quad \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}c$$

d.h. $|\vec{v}| = c \longrightarrow$ masselose Teilchen bewegen sich **immer** mit Lichtgeschwindigkeit

Bemerkung: näherungsweise gilt $E = c|\vec{p}|$ auch im **ultrarelativistischen** Fall (d.h. falls $E \gg mc^2$)

2.7 Viererimpuls

Transformationsverhalten von E, $\vec{p}$ bei Wechsel des Bezugssystems?

definieren **Vierergeschwindigkeit**:

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{dt}$$

Bemerkungen:

- dx^μ ist ein 4-Vektor, ds ist ein Skalar $\Rightarrow$ u^μ ist ein 4-Vektor
- u^μ ist **dimensionslos** (**nicht** Dimension einer Geschwindigkeit)

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \frac{\vec{v}}{c} \right)$$

$$dx^\mu dx_\mu = ds^2 \quad \Rightarrow \quad u^\mu u_\mu = 1$$

Viererimpuls:

$$p^\mu := mcu^\mu = (E/c, \vec{p})$$

$\longrightarrow$ in der relativistischen Mechanik bilden Energie/c und Impuls einen Vierervektor

$$p^2 = p \cdot p = p^\mu p_\mu = m^2 c^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2$$

das ist nichts anderes als die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

2.8 Kinematik von Teilchenprozessen

einlaufende Teilchen mit Viererimpulsen p_a

auslaufendene Teilchen mit Viererimpulsen q_b

Energie-Impuls-Erhaltung: $\sum_a p_a = \sum_b q_b$

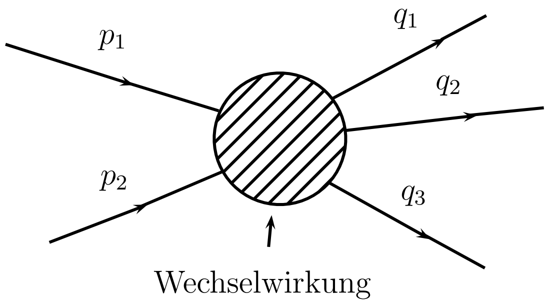


Abbildung 2.12: Schematische Darstellung eines Prozesses in der Teilchenphysik

Zerfall von Teilchen

nur **ein** Teilchen im Anfangszustand

einfachste Möglichkeit: zwei Teilchen im Endzustand (2-Teilchen-Zerfall); kennen bereits: $\pi^\pm \to \mu^\pm \overset{(-)}{\nu_\mu}$

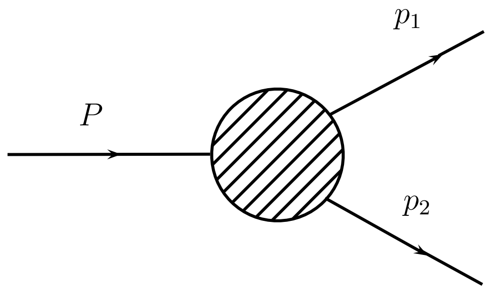


Abbildung 2.13: Zerfall eines Teilchens mit Viererimpuls P in zwei Teilchen mit Viererimpulsen p_1, p_2

$P = p_1 + p_2$

$$(E/c, \vec{P}) = (E_1/c, \vec{p}_1) + (E_2/c, \vec{p}_2)$$

wobei

$$E = c\sqrt{\vec{P}^2 + M^2c^2}, \quad E_i = c\sqrt{\vec{p}_i^{\,2} + m_i^2c^2} \quad (i = 1, 2)$$

im **Ruhesystem** des zerfallenden Teilchens (= Massenmittelpunktssystem) ist $\vec{P} = 0$:

$$(Mc, \vec{0}\,) = (\sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_1^2c^2}, \vec{p}_1) + (\sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_2^2c^2}, \vec{p}_2)$$

bzw.

$$\begin{aligned} Mc &= \sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_1^2 c^2} + \sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_2^2 c^2} \geq (m_1 + m_2)c \\ \vec{0} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Zerfall nur möglich, falls $M \geq m_1 + m_2$

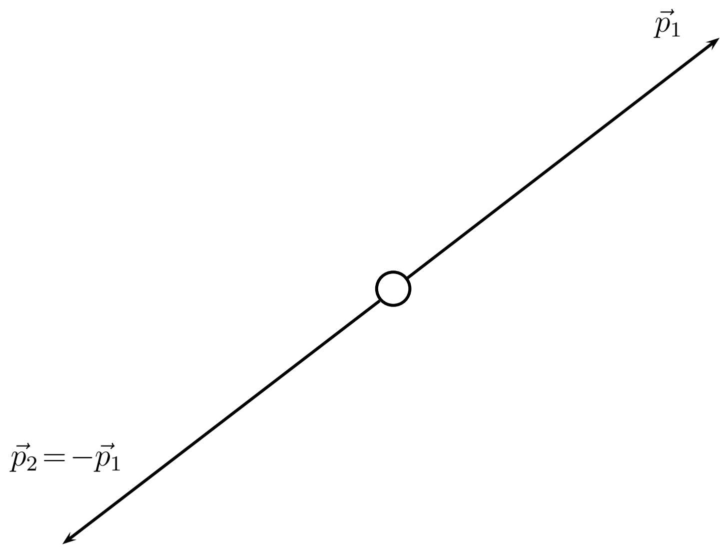


Abbildung 2.14: Impulserhaltung

Energie der Zerfallsprodukte:

man könnte natürlich $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ in die obige Gleichung für die Energieerhaltung einsetzen, $|\vec{p}_1|$ daraus ausrechnen und dann E_1 und E_2 erhalten; es geht aber **ohne** Zerlegung der Vierervektoren in zeitliche und räumliche Komponenten eleganter:

$$P = p_1 + p_2 \quad \Rightarrow \quad P - p_1 = p_2$$

$$\Rightarrow (P - p_1)^2 = p_2^2 \quad \Rightarrow \quad M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - 2P \cdot p_1 = m_2^2 c^2$$

im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens ist $P \cdot p_1 = ME_1$

$$\Rightarrow \quad E_1 = \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)c^2}{2M}$$

analog:

$$E_2 = \frac{(M^2 + m_2^2 - m_1^2)c^2}{2M}$$

Beispiel: $\pi^0 \to \gamma\gamma$, $M_{\pi^0} \simeq 135\,\mathrm{MeV}/c^2$

$$m_1 = m_2 = m_\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_2 = M_{\pi^0} c^2/2 \simeq 67.5\mathrm{MeV}$$

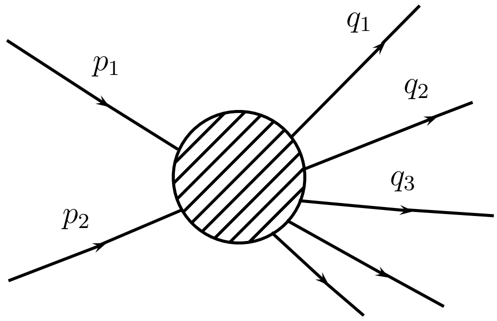


Abbildung 2.15: Erzeugung neuer Teilchen in einem Kollisionsexperiment

für Beschleunigerexperimente relevant: zwei Teilchen im Anfangszustand $\longrightarrow$ Teilchenerzeugung möglich

Beispiel: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

$$p_1 + p_2 = q_1 + q_2$$

$$(\underbrace{\sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m_e^2c^2}}_{E_{e^+}/c}, \vec{p}_1) + (\underbrace{\sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m_e^2c^2}}_{E_{e^-}/c}, \vec{p}_2) = (\underbrace{\sqrt{\vec{q}_1^{\,2} + m_\mu^2c^2}}_{E_{\mu^+}/c}, \vec{q}_1) + (\underbrace{\sqrt{\vec{q}_2^{\,2} + m_\mu^2c^2}}_{E_{\mu^-}/c}, \vec{q}_2)$$

im Massenmittelpunktsystem: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{0}$

$$\Rightarrow \quad E_{e^\pm} = c\sqrt{\vec{p}_i^{\,2} + m_e^2c^2} = E_{\mu^\pm} = c\sqrt{\vec{q}_i^{\,2} + m_\mu^2c^2} \geq m_\mu c^2$$

$\longrightarrow$ Prozess nur möglich, falls $E_{e^\pm} \geq m_\mu c^2$

Kapitel 3

Elektrodynamik

3.1 Felder in der speziellen Relativitätstheorie

einfachster Fall: **skalares Feldes** $S(x)$, das durch die Transformationseigenschaft

$$S'(x') = S(x)$$

bei einer Poincarétransformation $x' = Lx + a$ $(L^T g L = g)$ definiert ist; wegen $x = L^{-1}(x' - a)$ kann man auch schreiben:

$$S'(x') = S\big(L^{-1}(x' - a)\big)$$

ein (kontravariantes) **Vierervektor-Feld** V^μ ist durch das Transformationsverhalten

$$V^{\mu\prime}(x') = L^\mu_\nu V^\nu(x) = L^\mu_\nu V^\nu\big(L^{-1}(x' - a)\big)$$

definiert

durch Herunterziehen des Index mit Hilfe des metrischen Tensors kann man aus einem kontravarianten Vektorfeld $V^\mu(x)$ das dazugehörige kovariante Vektorfeld $V_\mu(x) = g_{\mu\nu} V^\nu(x)$ erhalten

der **4-Gradient** eines Skalarfeldes,

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} S(x) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}, \vec{\nabla} S\right)$$

ist der Prototyp eines **kovarianten** 4-Vektor-Feldes:

$$dS = S(x + dx) - S(x) = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

da dS ein Skalar ist und dx^μ ein (beliebig wählbarer) kontravarianter 4-Vektor ist, folgt aus dem Quotiententheorem, dass

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} S(x) =: \partial_\mu S(x)$$

ein kovarianter 4-Vektor ist

Bemerkung: $\partial^\mu := g^{\mu\nu}\partial_\nu$

ein **Tensorfeld** $T^{\mu\nu}(x)$ ist durch das Transformationsverhalten

$$T^{\mu\nu\prime}(x') = L^\mu_\alpha L^\nu_\beta T^{\alpha\beta}(x) = L^\mu_\alpha L^\nu_\beta T^{\alpha\beta}\big(L^{-1}(x'-a)\big)$$

definiert

Bemerkungen:

- durch Überschieben der Indizes erhält man das Skalarfeld $T^\mu_\mu(x)$
- mit Hilfe eines Vektorfeldes $V_\mu(x)$ und des Vierergradienten kann man das Tensorfeld $\partial_\mu V_\nu(x)$ erhalten

3.2 Viererpotential

ein elektromagnetisches Feld kann durch ein 4-Vektor-Feld, das sog. **Viererpotential** beschrieben werden:

$$A^\mu(x) = \big(A^0(t,\vec{x}), \vec{A}(t,\vec{x})\big) = \big(\phi(t,\vec{x}), \vec{A}(t,\vec{x})\big)$$

$\phi(t,\vec{x})\dots$ **skalares Potential**

$\vec{A}(t,\vec{x})\dots$ **Vektorpotential**

mit Hilfe des Viererpotentials kann man das **Wirkungsintegral** für die Bewegung eines Punktteilchens mit Masse m und Ladung q in dem durch $A^\mu(x)$ beschriebenen elektromagnetischen Feld folgendermaßen angeben:

$$\boxed{S = -mc\int ds - \frac{q}{c}\int dx^\mu A_\mu(x)}$$

die Forderungen der speziellen Relativitätstheorie sind durch ein Wirkungsintegral dieser Form offensichtlich erfüllt ($\longrightarrow$ Bewegungsgleichung hat in allen Inertialsystemen die gleiche **Form**)

wählen die Zeit t (in einem beliebigen Inertialsystem) zur Parametrisierung der Weltlinie ($t \to x(t)$) im Wirkungsintegral:

$$\begin{aligned} S &= -mc\int ds - \frac{q}{c}\int dx^\mu A_\mu(x) \\ &= \int dt\big(-mc^2\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2} - \frac{q}{c}\frac{dx^\mu}{dt}A_\mu(x(t))\big) \\ &= \int dt\big(-mc^2\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2} - q\underbrace{A_0}_{\phi} + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\big) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ **Lagrangefunktion** eines geladenen Punktteilchens in einem (durch ϕ und $\vec{A}$ beschriebenen) äußeren elektromagnetischen Feld:

$$\boxed{L = -mc^2\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2} - q\phi(t,\vec{x}) + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}(t,\vec{x})}$$

$\longrightarrow$ **kanonisch konjugierter Impuls** (dreidimensionale Notation!)

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} + \frac{q}{c}A_i = p_i + \frac{q}{c}A_i$$

bzw. in Vektorschreibweise:

$$\vec{P} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} + \frac{q}{c}\vec{A} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}$$

Hamiltonfunktion: $H = H(t,\vec{x},\vec{P})$

$$\begin{aligned} H &= \sum_i v_i\frac{\partial L}{\partial v_i} - L \\ &= \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} + mc^2\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2} - \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v} + q\phi \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} + q\phi \end{aligned}$$

H ist aber nicht durch $t,\vec{x},\vec{v}$, sondern durch $t,\vec{x},\vec{P}$ auszudrücken $\longrightarrow$ dabei hilft die folgende Beobachtung:

$$H - q\phi = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}, \quad \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}$$

$\longrightarrow$ zwischen $H - q\phi$ und $\vec{P} - q\vec{A}/c$ besteht die gleiche Beziehung wie zwischen E und $\vec{p}$ bei Abwesenheit des Feldes:

$$\left(\frac{H - q\phi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 \Rightarrow H = c\sqrt{m^2c^2 + \left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2} + q\phi$$

nichtrelativistischer Limes ($v \ll c$):

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - q\phi + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}, \quad H = \frac{\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}{2m} + q\phi, \quad \vec{p} = m\vec{v} = \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}$$

3.3 Elektromagnetisches Feld

wollen die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens in einem äußeren elektromagnetischen Feld finden (Rückwirkung der Ladung auf das Feld wird vernachlässigt)

brauchen zur Aufstellung der Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -q\nabla_i\phi(t,\vec{x}) + \frac{q}{c}\nabla_i\big(\vec{v}\cdot\vec{A}(t,\vec{x})\big)$$

$\longrightarrow$ Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{mv_i}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} &= -q\nabla_i\phi + \frac{q}{c}v_k\nabla_i A_k - \frac{q}{c}\frac{dA_i}{dt} \\ &= q\underbrace{\left(-\nabla_i\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}_{E_i} + \frac{q}{c}\underbrace{v_k(\nabla_i A_k - \nabla_k A_i)}_{(\vec{v}\times\vec{B})_i}\end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen den Potentialen ϕ, $\vec{A}$ und dem **elektrischen Feld** $\vec{E}$ und dem **Magnetfeld** $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

Bemerkung:

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_i \equiv (\vec{\nabla}\times\vec{A})_i := \varepsilon_{ijk}\nabla_j A_k$$

tatsächlich ist

$$\begin{aligned}(\vec{v}\times\vec{B})_i &= \varepsilon_{ikl}\, v_k\, B_l \\ &= \varepsilon_{ikl}\, v_k\, \varepsilon_{lmn}\nabla_m A_n \\ &= v_k(\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km})\nabla_m A_n \\ &= v_k(\nabla_i A_k - \nabla_k A_i)\end{aligned}$$

und man erhält die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\big(\vec{E}(t,\vec{x}) + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}(t,\vec{x})\big), \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}$$

aus den Ausdrücken

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

erhält man Gleichungen, die nur mehr $\vec{E}$ und $\vec{B}$ enthalten:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{B} := \nabla_i B_i &= \nabla_i\, \varepsilon_{ijk}\nabla_j A_k \\ &= \varepsilon_{ijk}\nabla_i\nabla_j A_k \\ &= 0\end{aligned}$$

da $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ und $\nabla_i\nabla_j = \nabla_j\nabla_i$

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}\vec{E})_i &= \varepsilon_{ijk}\nabla_j E_k \\ &= \varepsilon_{ijk}\nabla_j\Big(-\nabla_k\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_k}{\partial t}\Big) \\ &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{ijk}\nabla_j A_k \\ &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{A})_i \\ &= -\frac{1}{c}\frac{\partial B_i}{\partial t}\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ **erste Gruppe der Maxwellschen Gleichungen**

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0}$$

in Worten:

$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ldots$ zeitliche Änderung des Magnetfelds $\longrightarrow$ elektrisches Feld

$\operatorname{div}\vec{B} = 0\ldots$ es gibt keine magnetischen Ladungen

3.4 Eichtransformation

hätten auch von

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

starten können, um festzustellen, dass

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\,\vec{A}, \text{ sodass } \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

Einsetzen in

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

gibt

$$\operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\,\phi, \text{ sodass } \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\phi$$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind die physikalisch beobachtbaren Felder, dagegen sind ϕ und $\vec{A}$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ **nicht eindeutig** festgelegt, da

$$\phi' = \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda$$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ ungeändert lassen:

$$\begin{aligned}
\vec{B}' &= \operatorname{rot}\vec{A}' = \operatorname{rot}\vec{A} - \underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Lambda}_{0} = \vec{B} \\
\vec{E}' &= -\operatorname{grad}\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\operatorname{grad}\phi - \operatorname{grad}\frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\Lambda = \vec{E}
\end{aligned}$$

Bemerkung: $\nabla_i\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla_i$

ϕ und $\vec{A}$ sind also nur **bis auf** eine **Eichtransformation**

$$\phi' = \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda$$

durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bestimmt

Bemerkungen:

1. Verhalten des Viererpotentials bei Eichtransformation:
$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

2. Änderung des Wirkungsintegrals für geladenenes Teilchen in äußerem elektrischem Feld,
$$S' = S - \frac{q}{c} \int\limits_1^2 dx^\mu \, \partial_\mu \Lambda = S - \frac{q}{c} \int\limits_1^2 ds \, \frac{d\Lambda}{ds} = S - \frac{q}{c} \Lambda \Big|_1^2,$$
beinflusst Bewegungsgleichung nicht, da Weltlinie am Angfangs- und Endpunkt nicht variiert wird und somit $\delta S' = \delta S$ (wir wissen natürlich bereits, dass in der Bewegungsgleichung nur die eichinvarianten Größen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ vorkommen)

3. als weitere Möglichkeit kann man sich auch davon überzeugen, dass sich die Lagrangefunktion
$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} - q\phi(t, \vec{x}) + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(t, \vec{x})$$
bei einer Eichtransformation nur um eine **totale** Zeitableitung ändert

3.5 Lorentzkraft

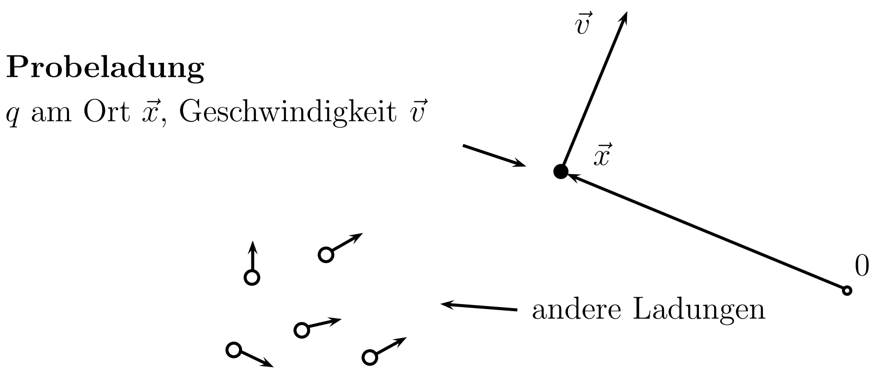


Abbildung 3.1: Probeladung in einem äußeren elektromagnetischen Feld

Kraft auf die Probeladung: $\quad \vec{F} = q\big(\vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(t, \vec{x})\big) \ldots$ **Lorentzkraft**

$\vec{E}(t,\vec{x})$, $\vec{B}(t,\vec{x})$ ist das von den „anderen“ Ladungen erzeugte **elektromagnetische Feld**

Bemerkungen:

1. Annahme: q so klein, dass Rückwirkung der Probeladung auf andere Ladungen vernachlässigbar
2. $\vec{E}(t,\vec{x})$, $\vec{B}(t,\vec{x})$ können **nicht** beliebig vorgegeben werden, sondern unterliegen den durch die erste Gruppe der Maxwellschen Gleichungen gegebenen Einschränkungen (siehe oben); m.a.W.: zwei willkürlich vorgegebene Vektorfelder entsprechen i. Allg. nicht einem durch eine Ladungs- und Stromverteilung („andere“ Ladungen) erzeugten elektromagnetischen Feld

Bewegungsgleichung eines Probeteilchens mit Masse m und Ladung q im (äußeren) elektromagnetischen Feld $\vec{E}(t,\vec{x})$, $\vec{B}(t,\vec{x})$:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= q\big(\vec{E}(t,\vec{x}) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(t,\vec{x})\big) \\ \vec{p} &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \end{aligned}}$$

aus der Bewegungsgleichung folgt die Formel für die Änderung der kinetischen Energie des Teilchens:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}}}_{\mathcal{E}} = q\vec{E}\cdot\vec{v}$$

$\mathcal{E}\ldots$ kinetische Energie + Ruheenergie

Bemerkung: Magnetfeld leistet keine Arbeit, da $\vec{v}\times\vec{B}\perp\vec{v}$

3.6 Bewegung im statischen homogenen elektrischen Feld

betrachten Bewegung eines Punktteilchens mit Masse m und Ladung q in einem **statischen homogenen (rein) elektrischen Feld**; wählen Koordinatensystem so, dass x-Achse in Richtung von $\vec{E}$ zeigt:

$$\vec{E} = E\vec{e}_x, \quad \vec{B} = 0$$

Bewegung der Punktladung beschrieben durch:

$$\dot{\vec{p}} = q\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}(t) = q\vec{E}t + \vec{p}(0)$$

$$\Rightarrow \quad p_x(t) = qEt + p_x(0), \quad p_y(t) = p_y(0), \quad p_z(t) = p_z(0)$$

Zusammenhang zwischen $\vec{p}$ und $\vec{v}$:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}}$$

weiters wissen wir:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E} = \frac{d}{dt}c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2} = \frac{d}{dt}q\vec{E} \cdot \vec{r}, \quad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E} - q\vec{E} \cdot \vec{r} = \mathcal{E} - qEx = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E}_{\text{tot}} = c\sqrt{m^2c^2 + \big(qEt + p_x(0)\big)^2 + p_y(0)^2 + p_z(0)^2} - qEx(t) = \text{const.}$$

betrachte nun die **spezielle** Anfangsbedingung $\vec{r}(0) = 0$, $\vec{p}(0) = 0$:

$$c\sqrt{m^2c^2 + (qEt)^2} - qEx(t) = mc^2$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{c\sqrt{m^2c^2 + (qEt)^2} - mc^2}{qE}, \quad y(t) = z(t) = 0$$

für **kleine** Zeiten (entspricht $|\vec{v}| \ll c$, da $\vec{v}(0) = 0$):

$$x(t) \simeq \frac{mc^2\big(1 + \frac{1}{2}(qEt/mc)^2 + \dots\big) - mc^2}{qE} = \frac{qE}{2m}t^2 + \dots$$

(nichtrelativistische Formel für Bewegung in konstantem Kraftfeld)

für **große** Zeiten nähert sich $|\vec{v}\,|$ immer mehr der Lichtgeschwindigkeit (ohne sie je zu erreichen)

3.7 Bewegung im statischen homogenen Magnetfeld

betrachten nun Bewegung eines geladenen Punktteilchens im **statischen homogenen Magnetfeld**

$$\vec{E} = 0, \quad \vec{B} = B\vec{e}_z$$

Bewegungsgleichung:

$$\dot{\vec{p}} = q\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} = \frac{\mathcal{E}\vec{v}}{c^2}$$

$\mathcal{E} =$ const. bei Bewegung in reinem Magnetfeld

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathcal{E}}{c^2}\dot{\vec{v}} = q\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{qcB}{\mathcal{E}} v_y \\ \dot{v}_y &= -\frac{qcB}{\mathcal{E}} v_x \\ \dot{v}_z &= 0 \quad v_z(t) = v_z(0) \quad \Rightarrow \quad z(t) = v_z(0)t + z(0) \end{aligned}$$

Bewegung in z-Richtung entkoppelt; verbleibendes zweidimensionales Problem:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \omega = \frac{qcB}{\mathcal{E}}$$

Integration ergibt:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0t}\cos(\omega t + \alpha) \\ v_y(t) &= -v_{0t}\sin(\omega t + \alpha) \\ v_{0t} &= \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2} = \text{const.} \end{aligned}$$

nochmalige Integration $\longrightarrow$ Projektion der Bewegung des Teilchens auf x-y-Ebene:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_{0t}}{\omega}\sin(\omega t + \alpha) + a \\ y(t) &= \frac{v_{0t}}{\omega}\cos(\omega t + \alpha) + b \end{aligned}$$

Kreis mit Radius

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\mathcal{E}}{qcB} = \frac{c}{qB}\frac{mv_{0t}}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} = \frac{cp_t}{qB}$$

mit Mittelpunkt (a, b); (p_t ist der Betrag der Projektion des Impulses auf die x-y-Ebene)

$\longrightarrow$ Ladung bewegt sich auf Schraubenlinie mit Achse $\| \vec{B}$

Bemerkung: für $|\vec{v}| \ll c$ ist $\mathcal{E} \simeq mc^2 \longrightarrow \omega = qB/mc$

3.8 Feldstärketensor

wollen **manifest kovariante** Form der Bewegungsgleichung eines geladenenen Punktteilchens in einem äußeren elektromagnetischen Feld herleiten

manifest kovariant: Form der Gleichung in der nur Vierevektoren, bzw. Vierertensoren auftreten $\longrightarrow$ Gleichung hat somit in allen Inertialsystem **offensichtlich** (mit freiem Auge erkennbar) die gleiche **Form**

erfreuliches Nebenprodukt: erhalten Transformationsverhalten des elektromagnetischen Feldes bei Poincarétransformation

Feldstärketensor $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \longrightarrow$ antisymmetrischer, eichinvarianter Tensor zweiter Stufe

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Hochziehen der Indizes mit Hilfe des metrischen Tensors ergibt:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

kovariante Form der Bewegungsgleichung:

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \frac{q}{c}\big(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\big)u^\nu = \frac{q}{c}F_{\mu\nu}u^\nu$$

räumliche Komponenten der manifest kovarianten Bewegungsgleichung gleichbedeutend mit

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\big(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\big)$$

zeitliche Komponente entspricht dem aus der Bewegungsgleichung folgenden Ausdruck für die zeitliche Änderung der kinetischen Energie:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\vec{v} \cdot \vec{E}.$$

Transformationsverhalten des Feldstärkestensors bei Poincarétransformation:

$$F^{\mu\nu\prime}(x') = L^\mu_\alpha L^\nu_\beta F^{\alpha\beta}(x) = L^\mu_\alpha F^{\alpha\beta}(x) L^\nu_\beta$$

mit $F = (F^{\mu\nu})$ und $L = (L^\mu_\nu)$ kann man diese Gleichung auch in Matrixform schreiben:

$$F' = LFL^T$$

Transformationsverhalten des elektrischen und magnetischen Feldes bei unserer Standardlorentztransformation:

$$\begin{aligned}
E'_x &= E_x \\
E'_y &= \gamma(E_y - VB_z/c) \\
E'_z &= \gamma(E_z + VB_y/c)
\end{aligned}$$

Komponente des elektrischen Feldes in Richtung parallel zur Relativgeschwindigkeit $\vec{V}$ der beiden Bezugssysteme bleibt ungeändert; Feldkomponente normal zu $\vec{V}$ wird geändert, Beimischung des Magnetfeldes

analoger Ausdruck für Magnetfeld:

$$\begin{aligned}
B'_x &= B_x \\
B'_y &= \gamma(B_y + VE_z/c) \\
B'_z &= \gamma(B_z - VE_y/c)
\end{aligned}$$

aus diesen Gleichungen kann man leicht die **allgemeine** Transformationsformel (bei beliebiger Lage von $\vec{V}$) erraten:

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{E}'_\parallel &= \vec{E}_\parallel & \qquad \vec{B}'_\parallel &= \vec{B}_\parallel \\
\vec{E}'_\perp &= \gamma(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B})_\perp & \qquad \vec{B}'_\perp &= \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{E})_\perp
\end{aligned}}$$

Umkehrtransformation: gestrichene und ungestrichene Größen vertauschen und $\vec{V}$ durch $-\vec{V}$ ersetzen:

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{E}_\parallel &= \vec{E}'_\parallel & \qquad \vec{B}_\parallel &= \vec{B}'_\parallel \\
\vec{E}_\perp &= \gamma(\vec{E}' - \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B}')_\perp & \qquad \vec{B}_\perp &= \gamma(\vec{B}' + \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{E}')_\perp
\end{aligned}}$$

angenommen im System S' ist ein **rein** elektrisches Feld, d.h. $\vec{B}' = 0$ (Feld durch **ruhende** Ladungen erzeugt)

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\vec{V}}{c} \times \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \perp \vec{E}, \vec{V}$$

angenommen im System S' verschwindet das elektrische Feld:

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\vec{V}}{c} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{B}, \vec{V}$$

Invarianten des elektromagnetischen Feldes:

$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$ ist ein **Skalar**

$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = 8\vec{E} \cdot \vec{B}$ ist ein **Pseudoskalar**

bei Spiegelung: $\vec{E} \to -\vec{E}$ (polarer Vektor), $\vec{B} \to \vec{B}$ (Axialvektor)

Folgerungen aus der Invarianz von $\vec{B}^2 - \vec{E}^2$ und $\vec{E} \cdot \vec{B}$:

$\vec{E}^2 = \vec{B}^2$ in einem Bezugssystem $\Rightarrow$ $\vec{E}^2 = \vec{B}^2$ auch in jedem anderen Bezugssystem

$\vec{E} \perp \vec{B}$ in einem Bezugssystem $\Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}$ auch in jedem anderen Bezugssystem

3.9 Wirkungsprinzip in Feldtheorien

Felder $\phi_m(x)$ $(m = 1, \ldots, n)$

erste Ableitungen der Felder $\partial_\mu \phi_m \equiv \partial \phi_m / \partial x^\mu \equiv \phi_{m,\mu}$

Beispiel: Elektrodynamik $\phi_m(x) \equiv A_\mu(x)$

Wirkungsintegral:

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \; \underbrace{\mathcal{L}(\phi_m(x), \phi_{m,\mu}(x), x)}_{\text{Lagrangedichte}}$$

Bemerkung: **explizite** Abhängigkeit von x nur bei Anwesenheit äußerer „Quellen“

bei der folgenden Ableitung der Feldgleichungen werden Indizes m unterdrückt:

Wirkungsprinzip: $\phi(x_a^0, \vec{x})$ und $\phi(x_b^0, \vec{x})$ fix vorgegeben; $\phi(x)$ für $x_a^0 < x^0 < x_b^0$ dadurch festgelegt, dass

$$S = \frac{1}{c} \int_G d^4x \, \mathcal{L}(\phi(x), \phi_{,\mu}(x), x), \quad G = [x_a^0, x_b^0] \times \mathbb{R}^3$$

ein Extremum annimmt

Randbedingungen im räumlich Unendlichen: $\lim\limits_{|\vec{x}|\to\infty} \phi(x^0, \vec{x}) = 0$

Variation des Feldes: $\phi(x) \to \phi(x) + \eta(x)$, $\eta(x_a^0, \vec{x}) = \eta(x_b^0, \vec{x}) = 0$

S extremal: $\delta S = 0$ für infinitesimales η

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S &= \frac{1}{c} \int\limits_G d^4x \, [\mathcal{L}(\phi + \eta, \phi,_\mu + \eta,_\mu, x) - \mathcal{L}(\phi, \phi,_\mu, x)] \\
&= \frac{1}{c} \int\limits_G d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \eta + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi,_\mu} \eta,_\mu}_{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi,_\mu} \eta \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi,_\mu} \right) \eta} \right] \\
&= \frac{1}{c} \int\limits_G d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi,_\mu} \right] \eta + \underbrace{\frac{1}{c} \int\limits_G d^4x \, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi,_\mu} \eta \right)}_{\int\limits_{\partial G} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi,_\mu} \eta = 0}
\end{aligned}
$$

in der letzten Zeile wurde der **Gaußsche Satz**[1]

verwendet: da $\eta|_{\partial G} = 0$, verschwindet der Beitrag des letzten Terms

abgesehen davon ist $\eta(x)$ beliebig $\to$ **Feldgleichung** (Euler-Lagrange-Gleichung):

$$
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi,_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}
$$

Bemerkung: bei mehreren Feldern $\phi \to \phi_m$

Erläuterung zum Gaußschen Satz in 4 Dimensionen: orientiertes Volumen des von den vierdimensionalen Vektoren a, b, c, d aufgespannten Parallelepipeds = $\det(a, b, c, d) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$

Erinnerung an $\int\limits_F d\vec{f} \cdot \vec{A}(\vec{x})$ in 3 Dimensionen: Fläche gegeben durch Parameterdarstellung $(u, v) \to \vec{x}(u, v)$

$$
\Rightarrow \quad d\vec{f} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \, du \, dv
$$

$$
\Rightarrow \quad \int\limits_F d\vec{f} \cdot \vec{A}(\vec{x}) = \int du \, dv \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \right) \cdot \vec{A}\big(\vec{x}(u, v)\big)
$$

[1]Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Integration über geeigneten Bereich der Parameter (u, v), sodass Fläche F durch Parameterdarstellung $(u, v) \to \vec{x}(u, v)$ beschrieben wird

$$\vec{A} \cdot d\vec{f} = \det(\vec{A}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} du, \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} dv) = A_i \underbrace{\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial u} du \frac{\partial x_k}{\partial v} dv}_{df_i}$$

Verallgemeinerung auf dreidimensionales Gebiet F im vierdimensionalen Raum: Parameterdarstellung $x = x(u, v, w)$

$$\det\left(a, \frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial x}{\partial w} dw\right) = a^\alpha \underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial x^\beta}{\partial u} du \frac{\partial x^\gamma}{\partial v} dv \frac{\partial x^\delta}{\partial w} dw}_{=: d\sigma_\alpha}$$

Gaußscher Integralsatz für vierdimensionales Gebiet G mit (dreidimensionalem) **Rand** ∂G:

$$\int\limits_G d^4x \, \partial_\mu \phi(x) = \int\limits_{\partial G} d\sigma_\mu \, \phi(x)$$

Bemerkung: Feldgleichung ändert sich bei der Ersetzung

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\mu f^\mu(\phi(x), x)$$

nicht, da wegen

$$S \to S + \frac{1}{c} \int d\sigma_\mu \, f^\mu$$

der Randterm bei der Variation von S nicht beiträgt (kann auch durch explizites Einsetzen in die Feldgleichung überprüft werden)

3.10 Wirkung für das elektromagnetische Feld

Feldvariablen $A_\mu(x)$

Forderung der **Poincaré- und Eichinvarianz** des Wirkungsintegrals

Eichinvarianz verbietet z.B. einen Term $A_\mu A^\mu$ in der Lagrangedichte

wissen bereits: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ist eichinvariant

$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ist ein Skalar

$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}$ ist ein **Pseudo**skalar, allerdings ist dieser wegen

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = 4 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\mu A^\nu \partial^\alpha A^\beta = 4 \partial^\mu \left(\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} A^\nu \partial^\alpha A^\beta\right)$$

auch ein Vierergradient → kein Beitrag zu Feldgleichung

wissen seit Maxwell: Grundgleichungen der Elektrodynamik sind **lineare** Differentialgleichungen → Felder dürfen in der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ höchstens quadratisch auftreten → Term $aF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ die **einzige** Möglichkeit:

$$S_{\text{Feld}} = -\frac{1}{16\pi c}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Bemerkung: Gauß-System!

→ gesamtes Wirkungsintegral von Feld **und** Teilchen:

$$S = -\sum_a \int m_a c\, ds_a - \sum_a \int \frac{q_a}{c} A_\mu dx_a^\mu - \frac{1}{16\pi c}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Umformung des zweiten Integrals mit Hilfe der **Viererstromdichte**

$$j^\mu(x) = \sum_a q_a\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a(t))\, \frac{dx_a^\mu(t)}{dt}$$

Zusammenhang mit der Ladungsdichte ρ und der Stromdichte $\vec{j}$:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \left(c\rho, \vec{j}\right) \\ \rho(t,\vec{x}) &= \sum_a q_a\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a(t)) \\ \vec{j}(t,\vec{x}) &= \sum_a q_a\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a(t))\, \frac{d\vec{x}_a(t)}{dt} \end{aligned}$$

Bemerkung: j^μ erfüllt die **Kontinuitätsgleichung**

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \;\Leftrightarrow\; \dot{\rho} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \;\Rightarrow\; Q(t) = \int d^3x\, \rho = \frac{1}{c}\int_{x^0=ct} d\sigma_\mu\, j^\mu$$

Behauptung:

$$\frac{1}{c^2}\int d^4x\, A_\mu j^\mu = \frac{1}{c}\sum_a \int q_a A_\mu dx_a^\mu$$

$$\Rightarrow S = -\sum_a \int m_a c\, ds_a - \frac{1}{c^2}\int d^4x\, A_\mu j^\mu - \frac{1}{16\pi c}\int d^4x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Bemerkung: beachte den Zusammenhang zwischen Eichinvarianz und $\partial_\mu j^\mu = 0$!

Euler-Lagrange-Gleichungen für das elektromagnetische Feld:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\nu,\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\nu,\mu}} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{c} j^\nu$$

$\boxed{\Rightarrow \textbf{zweite Gruppe der Maxwellschen Gleichungen}}$

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$$

$\boxed{\Leftrightarrow \textbf{dreidimensionale Schreibweise}}$

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho, \quad \mathrm{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Bemerkung: die manifest kovariante Gleichung

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0$$

ist äquivalent zur bereits früher besprochenen ersten Gruppe der Maxwellschen Gleichungen (homogene Differentialgleichungen):

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

mit Hilfe des total antisymmetrischen (Pseudo-) Tensors $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ kann man den **dualen** Feldstärketensor $\tilde{F}_{\mu\nu} := \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}/2$ definieren

$$\Rightarrow \quad (\tilde{F}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

die erste Gruppe der Maxwellschen Gleichungen lässt sich dann auch in der Form $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ schreiben

im Prinzip zu lösen wäre das **gekoppelte System** aus Feldgleichungen und Bewegungsgleichungen der geladenen Teilchen:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad \frac{dp_a^\mu}{ds} = \frac{q_a}{c} F^{\mu\nu} u_{a\nu}}$$

man stößt dabei jedoch bald an die Grenzen des Anwendbarkeit der klassischen Elektrodynamik (divergente elektromagnetische Selbstenergie von Punktladungen, Strahlungsrückwirkung, etc.)

$\rightarrow$ konsistente Behandlung erst im Rahmen der quantisierten Theorie (Quantenelektrodynamik) möglich

$\rightarrow$ daher oft bescheideneres Programm: Berechnung des elm. Feldes bei **vorgegebener** Ladungs- und Stromverteilung

3.11 Maxwellsche Gleichungen

unser Zugang: Konstruktion einer poincaréinvarianten Feldtheorie für ein Eichfeld $A^\mu(x)$ (gekoppelt an geladene Punktteilchen) $\rightarrow$ Maxwellsche Gleichungen

historisch: von James Clerk Maxwell (1831-1879) in den 60er Jahren des 19. Jahrhunderts formulierte Grundgleichungen der Elektrodynamik

erst von Einstein in voller Klarheit erkannt: spezielle Relativitätstheorie bereits in der Maxwellschen Theorie verborgen

Maxwellsche Gleichungen

$$\boxed{\begin{array}{lcllcl} \mathrm{rot}\,\vec{E}(t,\vec{x}) & = & -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t} & \mathrm{div}\,\vec{E}(t,\vec{x}) & = & 4\pi\rho(t,\vec{x}) \\ \mathrm{rot}\,\vec{B}(t,\vec{x}) & = & \frac{4\pi}{c}\vec{j}(t,\vec{x}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}(t,\vec{x})}{\partial t} & \mathrm{div}\,\vec{B}(t,\vec{x}) & = & 0 \end{array}}$$

Ladungsdichte $\rho(t,\vec{x})$ Ladung/Volumen

$\int_V d^3x\, \rho(t,\vec{x}) = Q_V(t) \ldots$ im beliebigen (dreidim.) Gebiet V zum Zeitpunkt t enthaltene Ladung

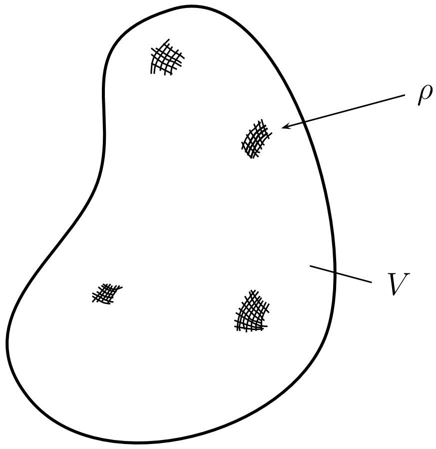


Abbildung 3.2: Ladungsdichte

Stromdichte $\vec{j}(t,\vec{x})$ Ladung/(Zeit × Fläche)

$\int\limits_F d\vec{f}\cdot\vec{j}(t,\vec{x}) = I_F(t)\ldots$ durch die (beliebige) Fläche F zum Zeitpunkt t fließender Strom (Ladung / Zeit)

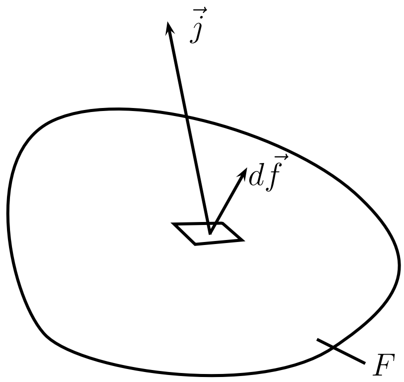


Abbildung 3.3: Stromdichte

ρ und $\vec{j}$ sind natürlich nicht voneinander unabhängig!

betrachte den Fall, dass sich die Bewegung der Ladungen durch ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(t,\vec{x})$ beschreiben lässt

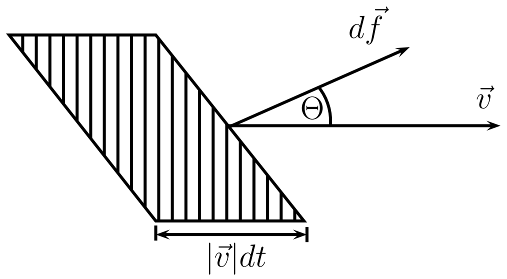


Abbildung 3.4: Geschwindigkeitsfeld

in der Zeit dt strömt die Ladung $\rho\,|\vec{v}|\,dt\,|d\vec{f}|\,\cos\theta = \rho\,\vec{v}\cdot d\vec{f}\,dt = \vec{j}\cdot d\vec{f}\,dt$ durch das betrachtete Flächenelement

$$\Rightarrow \quad \vec{j} = \rho\,\vec{v}$$

dass ρ und $\vec{j}$ nicht unabhängig voneinander gewählt werden können, folgt auch direkt aus den Maxwellschen Gleichungen:

$$\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B}}_{0} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{4\pi\rho}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$$

Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0}$$

physikalische Interpretation der Kontinuitätsgleichung:

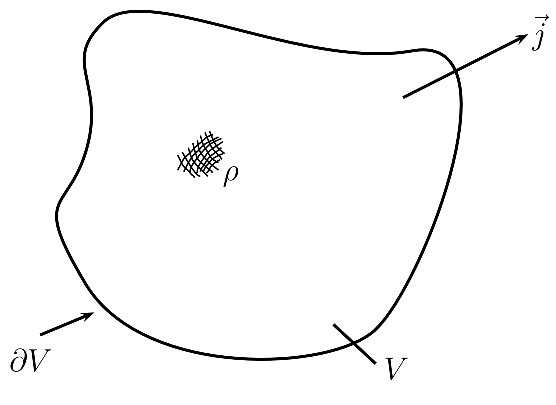


Abbildung 3.5: Interpretation der Kontinuitätsgleichung

bel. 3-dim. Gebiet V

$\partial V \ldots$ Rand von V

$$\frac{d}{dt}Q_V(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_V d^3x\,\rho(t,\vec{x}) = -\int\limits_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{j}(t,\vec{x}) = -\int\limits_V d^3x\,\mathrm{div}\,\vec{j}(t,\vec{x})$$

Bemerkung: im letzten Schritt wurde der Satz von Gauß verwendet

$$\Rightarrow \quad \int\limits_V d^3x\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j}\right) = 0$$

V beliebig $\quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$

lokale Form der Ladungserhaltung

Ladungs- und Stromverteilung sei im Endlichen konzentriert:

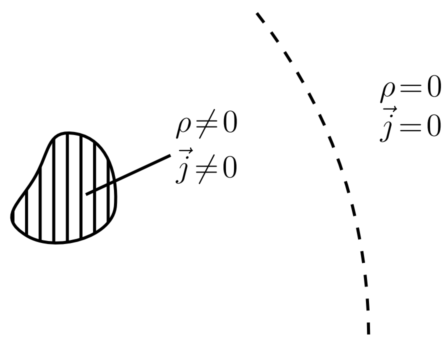


Abbildung 3.6: Ladungs- und Stromverteilung

Gesamtladung $\quad Q = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x\,\rho(t,\vec{x})$

$$\frac{dQ}{dt} = -\int\limits_{\partial\mathbb{R}^3} d\vec{f}\cdot\underbrace{\vec{j}(t,\vec{x})}_{0\,\text{für}\,|\vec{x}|\to\infty} \quad\Rightarrow\quad Q = \text{const.}$$

typischer Fall einer Erhaltungsgröße in einer relativistischen Feldtheorie

vierdimensionale Form der Kontuitätsgleichung:

$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(c\rho) + \vec{\nabla}\vec{j} = \partial_\mu j^\mu$$

Stromdichte-4-Vektor $\quad j^\mu = (c\rho, \vec{j}\,)$

Veranschaulichung des Transformationsverhaltens von ρ und $\vec{j}$:

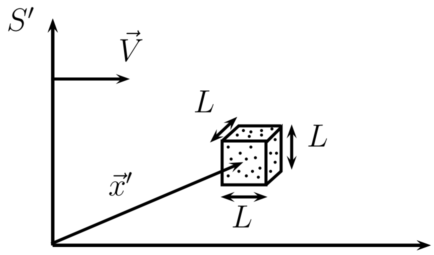


Abbildung 3.7: In S' ruhende Ladung Q in Würfel mit Kantenlänge L

$$j^{\mu\prime}(x') = \left(c\frac{Q}{L^3}, \vec{0}\right)$$

S' bewege sich mit Geschwindigkeit $\vec{V}$ relativ zu System $S \longrightarrow$ wegen Lorentzkontraktion in Bewegungsrichtung ist das Volumen, in dem sich die Ladung Q befindet nicht mehr L^3, sondern $L^3\sqrt{1-V^2/c^2}$

$$\Rightarrow \quad j^\mu(x) = \left(c\frac{Q}{L^3\sqrt{1-V^2/c^2}}, \frac{Q\vec{V}}{L^3\sqrt{1-V^2/c^2}}\right) = (c\rho, \underbrace{\vec{j}}_{\rho\vec{V}})$$

Bemerkung: völlig analog zu 4-Impuls

$$p^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \frac{m\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)$$

nur Invariante m durch Invariante Q ersetzt

3.12 Zeitunabhängiges Feld

betrachten spezielle Situation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho, \vec{j}, \vec{E}, \vec{B}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

Elektrostatik $\operatorname{rot}\vec{E} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$

Magnetostatik $\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0$

Gleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ **entkoppeln** im stationären Fall

3.13 Elektrostatik

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$$

rot und div sind **lineare** Differentialoperatoren $\longrightarrow$ falls $\vec{E}_{1,2}$ Lösung der elektrostatischen Gleichungen für $\rho_{1,2}$ $\Rightarrow$ Superposition $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ ist Lösung der Gleichungen für Ladungsdichte $\rho_1 + \rho_2$

Integralform der elektrostatischen Gleichungen:

$\oint d\vec{x} \cdot \vec{E} = 0$ für beliebige geschlossene Kurve

$\int\limits_V d^3x \operatorname{div}\vec{E} = \int\limits_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = \int\limits_V d^3x\, 4\pi\rho = 4\pi\, Q_V$

andere Möglichkeit: Formulierung der Elektrostatik mit Hilfe des skalaren Potentials

$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$ (im ganzen Raum) $\Leftrightarrow$ $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$

$\Rightarrow$ **Poissongleichung**[2]

$\operatorname{div}\operatorname{grad}\phi =: \Delta\phi = -4\pi\rho$

Laplace-Operator[3]

$$\Delta := \operatorname{div}\operatorname{grad} = \nabla_i\nabla_i = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Feld einer am Ursprung ruhenden Punktladung q:

erwarte aus Symmetriegründen:

$$\vec{E}(\vec{x}) = E(|\vec{x}|)\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

verwenden

$$\int\limits_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = 4\pi Q_V$$

wählen für $V =$ Kugel mit Radius r, Mittelpunkt im Ursprung

[2]Siméon **Denis** Poisson (1781-1840)
[3]Pierre Simon (Marquis de) Laplace (1749-1827)

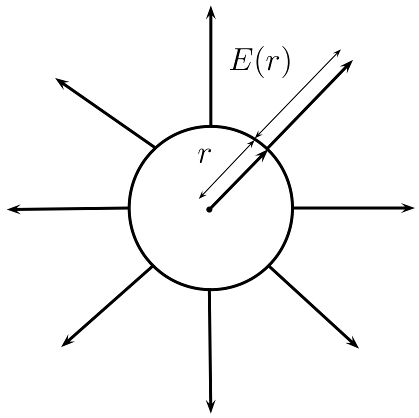


Abbildung 3.8: Elektrisches Feld einer im Ursprung ruhenden Punktladung

$$\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E} = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi q$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{q}{r^2}$$

$\longrightarrow$ **Coulombfeld** $\quad \vec{E}(\vec{x}) = \frac{q\vec{x}}{r^3} \qquad (r = |\vec{x}|)$

Charles Augustin Coulomb (1736-1806)

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ ebenfalls erfüllt, da

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{q\vec{x}}{r^3} = -\mathrm{grad}\,\frac{q}{r}$$

d.h. das (Coulomb-) Potential einer im Ursprung befindlichen Punktladung q ist:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x}|}$$

Feld einer am Ort $\vec{y}$ befindlichen Punktladung q:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{q(\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \\ \phi(\vec{x}) &= \frac{q}{|\vec{x}-\vec{y}|} \end{aligned}$$

Potential einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho \rightarrow$ verwende Linearität des Laplaceoperators $\rightarrow$ Lösung der Poissongleichung $\Delta\phi = -4\pi\rho$:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3y\, \frac{\rho(\vec{y}\,)}{|\vec{x}-\vec{y}\,|}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{x}) = -\operatorname{grad}\phi(\vec{x}) = \int d^3y\,\rho(\vec{y}\,)\,\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}\,|^3}$$

zur Beschreibung der Ladungsdichte einer Punktladung (mit Ladung $q = 1$) wird die sogenannte (dreidimensionale) Deltafunktion verwendet:

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{x} \neq \vec{0} \\ \infty & \text{für } \vec{x} = \vec{0} \end{cases} \qquad \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\,\delta^{(3)}(\vec{x}) = 1$$

es ist klar, dass es keine Funktion im üblichen Sinn mit dieser Eigenschaft gibt; eine mathematisch einwandfreie Beschreibung eines solchen Objekts lässt sich im Rahmen der Theorie der **Distributionen** (oder **verallgemeinerten Funktionen**) geben; für unsere Zwecke genügt es zu wissen, dass man mit der δ-Funktion so rechnen, dass

$$\int d^3x\,\delta^{(3)}(\vec{x})f(\vec{x}) = f(\vec{0})$$

falls $f(\vec{x})$ eine Funktion im üblichen Sinn ist

die Ladungsdichte einer Punktladung q am Ort $\vec{x} = \vec{y}$ lässt sich dann in der Form

$$\rho(\vec{x}) = q\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}\,)$$

schreiben und

$$\Delta\frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x})$$

3.14 Feld einer gleichförmig bewegten Ladung

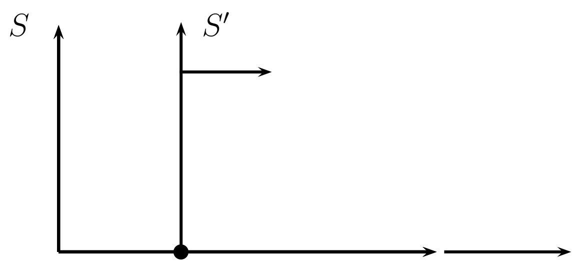


Abbildung 3.9: Punktladung q ruht im Ursprung von S'

Punktladung q ruht im Ursprung von S'

elektromagnetisches Feld im Inertialsystem S':

$$\vec{E}'(t',\vec{x}') = \frac{q\vec{x}'}{|\vec{x}'|^3} \qquad \vec{B}'(t',\vec{x}') = 0$$

Lorentztransformation $\longrightarrow$ elektromagnetisches Feld $\vec{E}(t,\vec{x})$, $\vec{B}(t,\vec{x})$ ... Feld einer Ladung, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{V} = V\vec{e}_x$ bewegt

kennen bereits das Verhalten des elektromagnetischen Feldes bei obiger Lorentztransformation:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - VB_z/c) & B'_y &= \gamma(B_y + VE_z/c) \\ E'_z &= \gamma(E_z + VB_y/c) & B'_z &= \gamma(B_z - VE_y/c) \end{aligned}$$

die Umkehrtransformation $(V \to -V)$ lautet:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x & B_x &= B'_x \\ E_y &= \gamma(E'_y + VB'_z/c) & B_y &= \gamma(B'_y - VE'_z/c) \\ E_z &= \gamma(E'_z - VB'_y/c) & B_z &= \gamma(B'_z + VE'_y/c) \end{aligned}$$

wir haben es mit dem Spezialfall eines rein elektrischen Feldes im System S' zu tun, die Formeln vereinfachen sich dann auf

$$E_x = E'_x, \quad E_{y,z} = \gamma E'_{y,z}$$

$$B_x = 0, \quad B_y = -\gamma V E'_z/c, \quad B_z = \gamma V E'_y/c$$

den Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld kann man in diesem Fall etwas kompakter schreiben:

$$\vec{B} = \gamma\vec{V} \times \vec{E}'/c = \vec{V} \times \vec{E}/c$$

d.h. $\vec{B} \perp \vec{V}$, $\vec{E}$

setzt man nun das Feld der in S' ruhenden Punktladung ein, so erhält man

$$E_x(t,\vec{x}) = E'_x(t',\vec{x}') = \frac{qx'}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}} = \frac{q\gamma(x - Vt)}{\left(\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$E_y(t,\vec{x}) = \gamma E'_y(t',\vec{x}') = \frac{q\gamma y'}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}} = \frac{q\gamma y}{\left(\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

$$E_z(t,\vec{x}) = \gamma E'_z(t',\vec{x}\,') = \frac{q\gamma z'}{\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)^{3/2}} = \frac{q\gamma z}{\left(\gamma^2(x-Vt)^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

führe jetzt den Radiusvektor $\vec{r} = \vec{x} - Vt\vec{e}_x$ von der momentanen Position der Ladung q zum Aufpunkt $\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ ein:

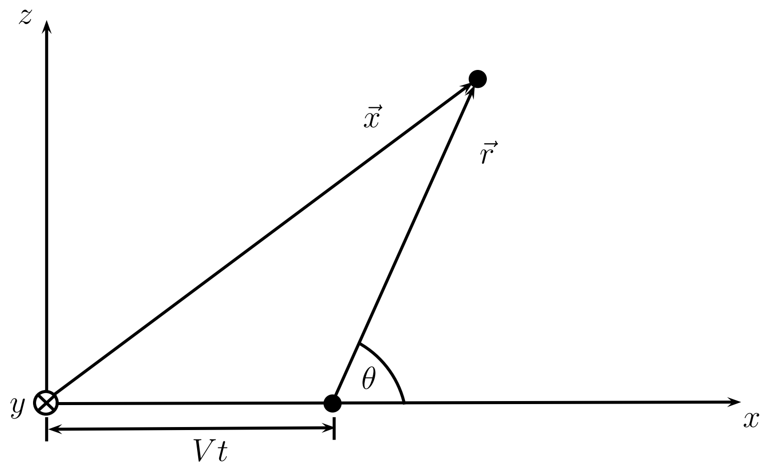


Abbildung 3.10: Radiusvektor $\vec{r}$

$\theta =$ Winkel zw. $\vec{V}$ u. $\vec{r}$

$r := |\vec{r}|$

$y^2 + z^2 = r^2 \sin^2\theta$

Umformung des Ausdrucks im Nenner:

$$\begin{aligned}
\gamma^2(x-Vt)^2+y^2+z^2 &= \gamma^2\left((x-Vt)^2+\frac{y^2+z^2}{\gamma^2}\right)\\
&= \gamma^2\Bigg(\underbrace{(x-Vt)^2+y^2+z^2}_{r^2}+\underbrace{(1/\gamma^2-1)}_{-V^2/c^2}\underbrace{(y^2+z^2)}_{r^2\sin^2\theta}\Bigg)\\
&= \gamma^2 r^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}\,\frac{1-V^2/c^2}{(1-V^2\sin^2\theta/c^2)^{3/2}}$$

bei fester Entfernung r von der Ladung wächst der Betrag der Feldstärke, wenn θ von 0 bis $\pi/2$ zunimmt (bzw. von π auf $\pi/2$ abnimmt); seinen kleinsten Wert hat das Feld in den Richtungen parallel zur Bewegung ($\theta = 0,\, \pi$); er beträgt

$$E_\parallel = \frac{q}{r^2}\,(1-V^2/c^2)$$

der Maximalwert wird senkrecht zur Bewegungsrichtung erreicht ($\theta = \pi/2$):

$$E_\perp = \frac{q}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

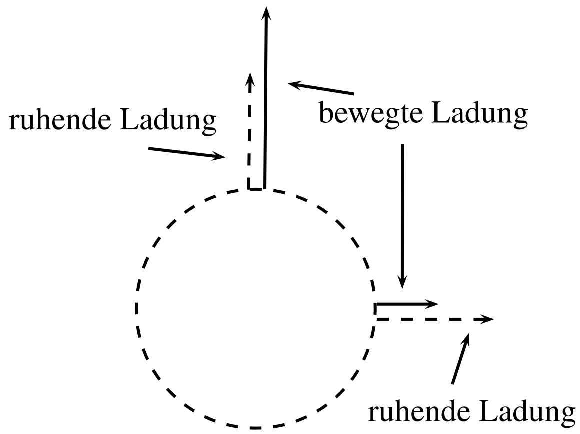


Abbildung 3.11: Elektrisches Feld einer ruhenden und einer bewegten Punktladung

Flächen mit gleichem Betrag der Feldstärke:

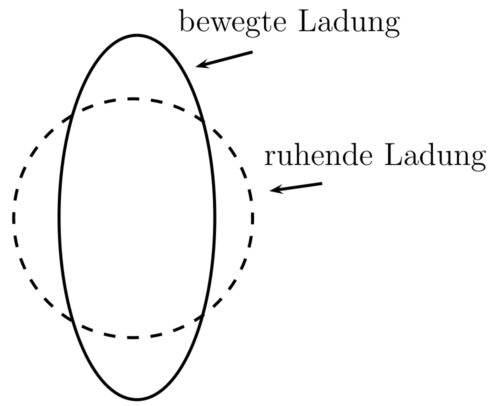


Abbildung 3.12: Flächen mit gleichem Betrag der Feldstärke

bei einer Vergrößerung der Geschwindigkeit wird $E_\parallel$ kleiner und $E_\perp$ größer; Feld einer bewegten Ladung ist in Bewegungsrichtung „abgeplattet“

Dilatation des Coulombfeldes ist auch experimentell beobachtbar: fliegt ein geladenes Teilchen durch eine Blasenkammer, so hinterlässt es dort eine Ionisationsspur; deren Dicke (Anzahl der ionisierten Teilchen pro Länge der Spur) nimmt zunächst mit zunehmender Teilchenenergie ab (grob gesprochen hat das Teilchen immer weniger Zeit Atome zu ionisieren); wird die Energie weiter gesteigert

($v \simeq c$), so nimmt die Ionisation nach Durchlaufen eines Minimums wieder zu, da durch den oben beschriebenen Effekt das Coulombfeld auseinandergequetscht wird und mehr Atome pro Länge der Bahn ionisieren kann

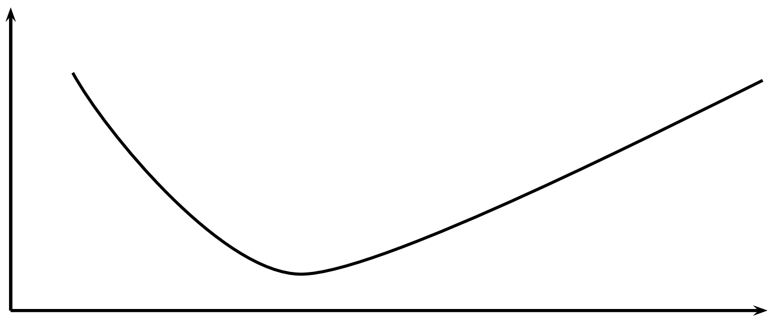


Abbildung 3.13: Ionisationsdichte

3.15 Elektrischer Dipol

Ladungsverteilung (Ladungsdichte ρ) mit typischer Abmessung ℓ sei um den Ursprung konzentriert; wollen das Feld in großer Entfernung $r \gg \ell$ wissen

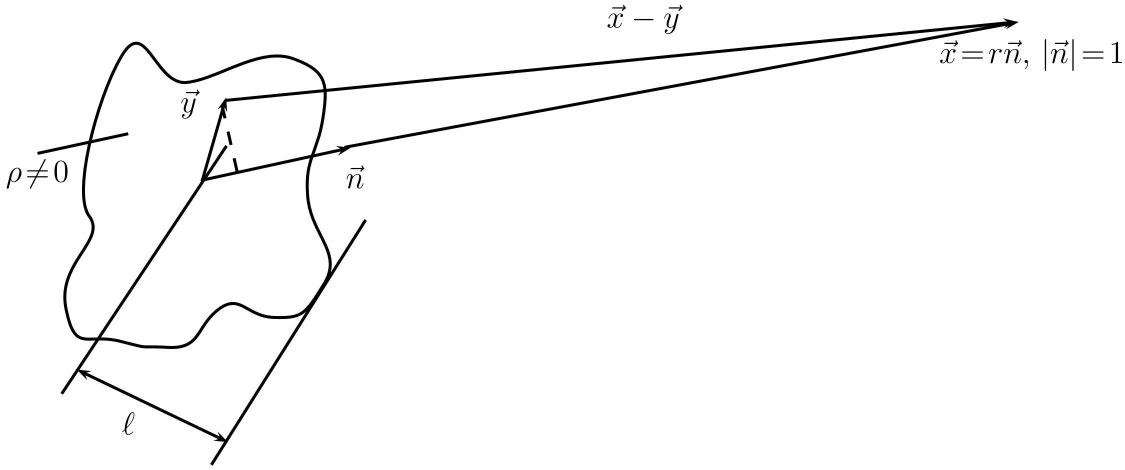


Abbildung 3.14: Elektrisches Feld in großer Entfernung von einer Ladungsverteilung

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3y \, \frac{\rho(\vec{y}\,)}{|\vec{x} - \vec{y}\,|}$$

$$|\vec{x} - \vec{y}\,| = r|\vec{n} - \vec{y}/r| = r\sqrt{1 + \vec{y}^{\,2}/r^2 - 2\,\vec{n}\cdot\vec{y}/r}$$

$$\frac{|\vec{y}\,|}{r} \le \frac{\ell}{r} \ll 1 \;\Rightarrow\; \varepsilon := \vec{y}^{\,2}/r^2 - 2\,\vec{n}\cdot\vec{y}/r \ll 1$$

$$(1+\varepsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{5}{16}\varepsilon^3 + \dots$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}\,|} &= \frac{1}{r} - \frac{1}{2r}\left(\vec{y}^{\,2}/r^2 - 2\vec{n}\cdot\vec{y}/r\right) + \frac{3}{8r}4\left(\vec{n}\cdot\vec{y}/r\right)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}n_i y_i + \frac{1}{2}\frac{1}{r^3}n_i n_k(3y_i y_k - \delta_{ik}\vec{y}^{\,2})\end{aligned}$$

$$\phi(\vec{x}) = \phi(r\vec{n}) = \frac{Q}{r} + \frac{n_i d_i}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{n_i n_k q_{ik}}{r^3} + \dots$$

Ladung $Q = \int d^3y\,\rho(\vec{y}\,)$

elektrisches Dipolmoment $\vec{d} = \int d^3y\,\rho(\vec{y}\,)\vec{y}$

Quadrupoltensor $q_{ik} = \int d^3y\,\rho(\vec{y})(3y_i y_k - \delta_{ik}\vec{y}^{\,2})$

Bemerkung: Dipolmoment einer insgesamt neutralen Ladungsverteilung ($Q = 0$) ist von der Wahl des Koordinatenursprungs unabhängig

Ladungsverteilung mit $Q = 0$, $\vec{d} \neq 0$ und vernachlässigbarer Ausdehnung ℓ: **elektrischer Dipol**

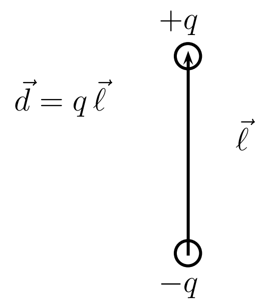


Abbildung 3.15: Ein elektrischer Dipol ergibt sich aus der abgebildeten Ladungsverteilung im Limes $|\vec{\ell}| \to 0$, wobei $\vec{d}$ konstant gehalten wird

Potential eines Dipols: $\phi^d(r\vec{n}) = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{d}}{r^2}$

elektr. Feld eines Dipols: $E_i^d(r\vec{n}) = -\nabla_i\phi^d(r\vec{n}) = (3n_i n_j - \delta_{ij})\dfrac{d_j}{r^3} - \frac{4\pi}{3}\delta^{(3)}(\vec{x})\vec{d}$

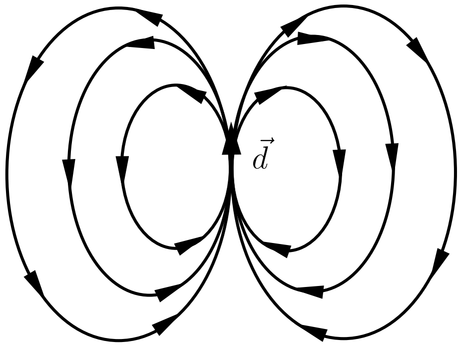


Abbildung 3.16: Elektrisches Feld eines Dipols

Beispiele für elektrische Dipolmomente elektrisch neutraler Moleküle:

H_2O $|\vec{d}| = 0.4$ eÅ, NH_3 $|\vec{d}| = 0.3$ eÅ

welche Ladungsverteilung ergibt ein **reines** Dipolfeld?

$$\rho(\vec{x}) = q\left(\delta^{(3)}(\vec{x} - \ell\vec{e}_z/2) - \delta^{(3)}(\vec{x} + \ell\vec{e}_z/2)\right), \quad d = \ell q,\ \vec{d} = d\vec{e}_z$$

betrachten Limes $\ell \to 0$:

$$\rho(\vec{x}) = \lim_{\ell\to 0}\frac{d}{\ell}\left(\delta^{(3)}(\vec{x} - \ell\vec{e}_z/2) - \delta^{(3)}(\vec{x} + \ell\vec{e}_z/2)\right) = -d\frac{\partial}{\partial z}\delta^{(3)}(\vec{x}) = -\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\delta^{(3)}(\vec{x})$$

Einsetzen in die Potentialformel:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}) &= \int d^3y\,\frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -\int d^3y\,\frac{\vec{d}\cdot\vec{\nabla}_y\delta^{(3)}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \\
&= \int d^3y\,\delta^{(3)}(\vec{y})\,\vec{d}\cdot\vec{\nabla}_y\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -\vec{d}\cdot\vec{\nabla}_x\int d^3y\,\frac{\delta^{(3)}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \\
&= -\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{\vec{x}\cdot\vec{d}}{r^3}
\end{aligned}$$

3.16 Multipolentwicklung

verwende in der Formel (erzeugende Funktion der Legendre-Polynome)

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha)^{1/2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_{\min}^{\ell}}{r_{\max}^{\ell+1}}P_\ell(\cos\alpha)$$

$$r_{\min} = \min(r, r'),\ r_{\max} = \max(r, r')$$

Kugelkoordinaten für $\vec{x}$ und $\vec{y}$:

$$\begin{array}{ll} \vec{x}: & x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi,\ x_3 = r\cos\theta \\ \vec{y}: & y_1 = r'\sin\theta'\cos\varphi',\ y_2 = r'\sin\theta'\sin\varphi',\ y_3 = r'\cos\theta' \end{array}$$

$$P_\ell(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')Y_{\ell m}(\theta,\varphi), \quad r > r'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}}Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(\vec{x}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{Q_{\ell m}}{r^{\ell+1}}Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

sphärische Multipolmomente:

$$Q_{\ell m} = \int d^3y\,\rho(\vec{y})\,r'^\ell\,Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')$$

3.17 Ladungsverteilung in einem äußeren Feld

$\vec{E}$ möge sich in dem Gebiet mit $\rho \neq 0$ nur „wenig“ ändern

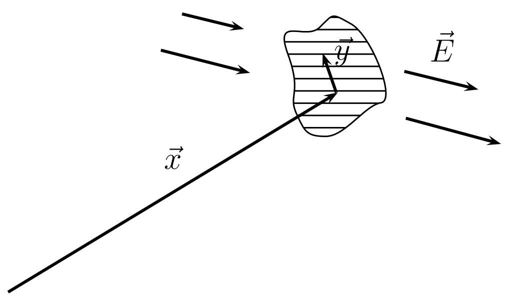


Abbildung 3.17: Ladungsverteilung in einem äußeren elektrischen Feld $\vec{E}$

Kraft auf die Ladungsverteilung:

$$\begin{aligned} F_i &= \int d^3y\,\rho(\vec{y})\,E_i(\vec{x}+\vec{y}) \\ &= \int d^3y\,\rho(\vec{y})\,[E_i(\vec{x}) + y_j \underbrace{\nabla_j E_i(\vec{x})}_{-\nabla_j\nabla_i\phi = -\nabla_i\nabla_j\phi = \nabla_i E_j} + \ldots] \\ &= QE_i(\vec{x}) + \nabla_i\,\vec{d}\cdot\vec{E}(\vec{x}) + \ldots \end{aligned}$$

für einen Dipol ($Q = 0$): $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{x})\right)$

→ **potentielle Energie** des Dipols an der Stelle $\vec{x}$: $V(\vec{x}) = -\vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{x})$

Drehmoment auf einen Dipol:

$$\begin{aligned} N_i &= \varepsilon_{ijk} \int d^3y\, \rho(\vec{y})\, y_j E_k(\vec{x} + \vec{y}) \\ &= \varepsilon_{ijk} \int d^3y\, \rho(\vec{y})\, y_j [E_k(\vec{x}) + y_l \nabla_l E_k(\vec{x}) + \ldots] \\ &= \varepsilon_{ijk} d_j E_k(\vec{x}) + \ldots \end{aligned}$$

Vektorschreibweise: $\vec{N} = \vec{d} \times \vec{E}$

→ ein **homogenes** elektrisches Feld übt ein Drehmoment, aber **keine** Kraft auf einen Dipol aus

→ Dipol stellt sich **parallel** zum Feld ein ($V = -\vec{d} \cdot \vec{E}$!)

→ nur ein **inhomogenes** elektrisches Feld kann einen Dipol beschleunigen!

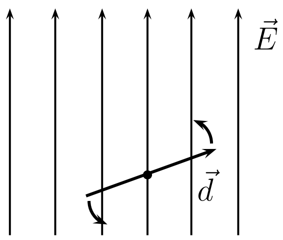


Abbildung 3.18: Dipol in einem homogenen elektrischen Feld

3.18 Elektrostatische Energie

Bemerkung: elektrostatisches Feld sei durch $\vec{E}(\vec{x}) = -\text{grad}\,\phi(\vec{x})$ gegeben; welche Arbeit muss aufgewendet werden um eine Probeladung q vom Ort $\vec{x}_1$ zum Ort $\vec{x}_2$ zu bringen? → Kraft auf die Probeladung am Ort $\vec{x}$: $\vec{F}(\vec{x}) = q\vec{E}(\vec{x})$

$$\begin{aligned} dA &= -\vec{F} \cdot d\vec{x} = -q\vec{E} \cdot d\vec{x} = q\,\text{grad}\,\phi \cdot d\vec{x} \\ A &= q \int_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2} d\vec{x} \cdot \text{grad}\,\phi = q[\phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1)] = qU \end{aligned}$$

$U \ldots$ Potentialdifferenz

Problemstellung: betrachte N Punktladungen q_a, die sich zunächst alle sehr weit voneinander entfernt (idealisiert: im Unendlichen) befinden; diese Ladungen werden an die Plätze $\vec{x}_a$ gebracht $\to$ erzeugen elektrisches Feld

es wird die **Arbeit** berechnet, die zum Aufbau dieses Feldes erforderlich ist; dazu werden die Ladungen eine nach der anderen an ihre Positionen im Endlichen gebracht:

- um die Ladung q_1 an den Platz $\vec{x}_1$ zu bringen, muss keine Arbeit aufgewendet werden (da noch kein Feld vorhanden): $A_1 = 0$

  das Potential ist jetzt $\phi = \phi_1$ mit
  $$\phi_1(\vec{x}) = \frac{q_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|}$$

- als nächstes wird die Ladung q_2 aus dem Unendlichen nach $\vec{x}_2$ gebracht; dabei muss die Arbeit
  $$A_2 = q_2\,\phi(\vec{x}_2) = \frac{q_2 q_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}$$
  verrichtet werden

  das neue Potential ist nun $\phi = \phi_1 + \phi_2$ mit
  $$\phi_2(\vec{x}) = \frac{q_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|}$$

- usw.

- schließlich wird die letzte Ladung q_N aus dem Unendlichen nach $\vec{x}_N$ transportiert; die erforderliche Arbeit ist
  $$A_N = q_N\,(\phi_1(\vec{x}_N) + \ldots \phi_{N-1}(\vec{x}_N))$$
  das endgültige Potential ist nun
  $$\phi(\vec{x}) = \sum_{a=1}^{N} \frac{q_a}{|\vec{x} - \vec{x}_a|}$$

insgesamt wurde zum Aufbau dieses Potentials die Arbeit

$$\begin{aligned} A &= \sum_{a=1}^{N} A_a = \sum_{b=2}^{N} q_b \sum_{a=1}^{b-1} \phi_a(\vec{x}_b) \\ &= \sum_{a<b}^{N} \frac{q_a q_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} = \frac{1}{2} \sum_{a\neq b}^{N} \frac{q_a q_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} \end{aligned}$$

geleistet

2 Fälle sind zu unterscheiden:

1. Ladung verschwindet in makroskopisch kleinen, mikroskopisch großen Gebieten $\rightarrow$ zu A tragen nur nahe benachbarte Punkte bei (quantenmechanische Behandlung erforderlich)

   Beispiel: **Ionenkristall** (z.B. Na^+Cl^-): regelmäßige Anordnung positiver und negativer Ladungen führt zu $A < 0 \rightarrow$ in Form von Schmelz- und Verdampfungswärme wieder aufzuwenden, um die Substanz in den gasförmigen Zustand überzuführen (NaCl: 7.92 eV pro Molekül)

2. Ladung in makroskopisch kleinen, mikroskopisch großen Gebieten dV verschwindet nicht $\rightarrow$ durch $dQ = \rho\, dV$ können eine **ausgeschmierte** Ladungsdichte ρ und ein makroskopisches Feld $\vec{E}$ definiert werden $\rightarrow$ man kann A in der Form
$$A = \frac{1}{2}\int d^3x\, d^3y\, \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$
   schreiben

   Vorsicht: Formel **nicht** anwendbar für Ladungsdichte von Punktladungen, da in diesem Fall die unendliche Selbstenergie zu einem divergenten Ergebnis führen würde (Beträge von $\vec{x} = \vec{y}$!)

   weitere Umformung:
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int d^3x\, \rho(\vec{x}) \underbrace{\int d^3y\, \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}}_{\phi(\vec{x})} = \frac{1}{2}\int d^3x\, \underbrace{\rho(\vec{x})}_{-\Delta\phi(\vec{x})/4\pi}\, \phi(\vec{x}) \\ &= -\frac{1}{8\pi}\int d^3x\, (\nabla_i\nabla_i\phi(\vec{x}))\,\phi(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \nabla_i\phi(\vec{x})\nabla_i\phi(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \vec{E}(\vec{x})\cdot\vec{E}(\vec{x}) \end{aligned}$$

   Energiedichte des elektrostatischen Feldes: $\eta(\vec{x}) = \vec{E}(\vec{x})^2/8\pi$

Bemerkung: **divergente** Selbstenergie einer Punktladung:
$$\begin{aligned} |\vec{E}(\vec{x})| &= \frac{|q|}{r^2}, \quad r = |\vec{x}| \\ U &= \int d^3x\, \eta(\vec{x}) = \frac{4\pi}{8\pi}\int_0^\infty dr\, r^2\, \frac{q^2}{r^4} = \lim_{r\to 0}\frac{q^2}{2r} = \infty \end{aligned}$$

Zusammenbruch der mathematischen Konsistenz der **klassischen** Elektrodynamik von punktförmigen Elektronen bei Abständen r_0 charakterisiert durch

$$e^2/r_0 \sim m_e c^2$$

zu erwarten

$\rightarrow$ **klassischer Elektronradius**

$$r_0 := e^2/m_e c^2 = 2.82 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

tatsächlich endet die Anwendbarkeit der klassischen Elektrodynamik durch **Quanteneffekte** bereits bei wesentlich größeren Abständen von der typischen Größenordnung der **Comptonlänge** r_e des Elektrons:

$$r_e = \hbar/m_e c = 3.86 \times 10^{-13}\,\mathrm{m}$$

3.19 Magnetostatik

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Integralform:

integrieren erste Gleichung über beliebige Fläche F und verwenden den Satz von Stokes[4]:

$$\int_F d\vec{f} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{B} = \underbrace{\int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B}}_{Z_B} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}}_{I_F}$$

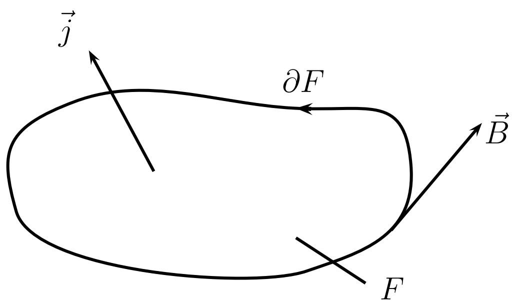


Abbildung 3.19: Illustration von $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

in Worten: die Zirkulation Z_B des Magnetfeldes längs einer (beliebigen) geschlossenen Kurve = Strom durch eine (beliebige) Fläche, deren Rand die betrachtete geschlossene Kurve ist mal $4\pi/c$

[4](Sir) George Gabriel Stokes (1819-1903)

integrieren die zweite Gleichung über ein beliebiges dreidimensionales Gebiet V und verwenden den Gaußschen Satz:

$$0 = \int\limits_V d^3x \; \mathrm{div}\,\vec{B} = \int\limits_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{B}$$

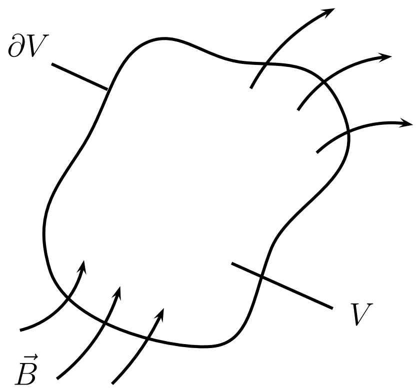


Abbildung 3.20: Illustration von div $\vec{B} = 0$

in Worten: Fluss des Magnetfeldes durch (bel.) geschlossene Fläche verschwindet

Beispiel: ∞ langer Draht, durch den der konstante Strom I fließt (nehmen an, dass bewegte Ladungen durch ruhende Ladungen gerade kompensiert werden $\longrightarrow$ $\rho = 0 \longrightarrow \vec{E} = 0$)

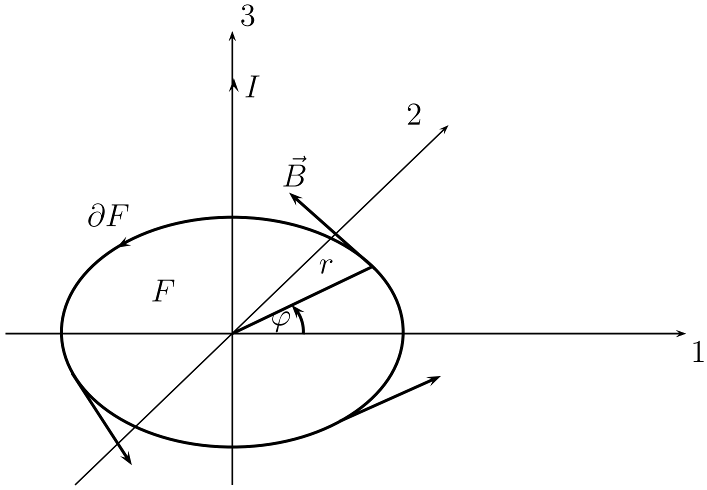


Abbildung 3.21: Magnetfeld eines in einem unendlich langen Draht fließenden Stromes I

aus Symmetriegründen hängt $|\vec{B}(\vec{x})|$ nur vom Normalabstand r vom Draht ab

$$Z_B = B(r)2\pi r = \frac{4\pi}{c} I, \quad B(r) = \frac{2I}{cr}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{2I}{cr}(-\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_2) = \frac{2I}{c}\frac{1}{x_1^2+x_2^2}(-x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2)$$

Anwendungsbeispiel: Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen ∞ langen, parallelen Drähten mit Abstand r

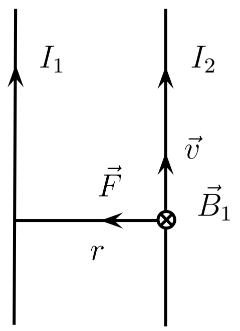
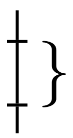


Abbildung 3.22: Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen, unendlich langen, parallelen Drähten

I_1, I_2 in gleicher Richtung: Anziehung

I_1, I_2 in entgegengesetzter Richtung: Abstoßung

$\lambda \ldots$ bewegte Ladung / Länge



$$\lambda\, v\, dt = dQ \;\Rightarrow\; I = \tfrac{dQ}{dt} = \lambda\, v$$

Abbildung 3.23: Zusammenhang zwischen λ und I

Kraft auf ein Drahtstück der Länge $d\ell$:

$$|d\vec{F}| = \left| dQ\,\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right| = \left| \lambda\, d\ell\,\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right| = \left| \frac{I_2}{c}\, d\ell\, \frac{2I_1}{cr} \right|$$

$\longrightarrow$ Kraft pro Länge: $\quad \dfrac{2I_1I_2}{c^2r}$

systematische Methode zur Berechnung des Magnetfeldes bei vorgegebener Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

Einsetzen von $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ in $\operatorname{rot}\vec{B} = 4\pi\vec{j}/c$ ergibt:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = 4\pi\vec{j}/c$$

bei vorgegebenem Magnetfeld $\vec{B}$ ist das Vektorpotential $\vec{A}$ nur bis auf eine Eichtransformation $\vec{A}' = \vec{A} - \operatorname{grad}\Lambda$ festgelegt $\longrightarrow$ diese Freiheit kann benützt werden, um für $\vec{A}$ eine **Eichbedingung** (d.h. eine geeignete Nebenbedingung) zu verlangen

bei der Behandlung des zeitunabhängigen Magnetfeldes ist die **Coulombeichung**

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0$$

zweckmäßig, denn man erhält auf diese Weise drei ungekoppelte Poissongleichungen:

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

die Lösung der Poissongleichung kennen wir aber bereits aus der Elektrostatik:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3y\,\frac{\vec{j}(\vec{y}\,)}{|\vec{x}-\vec{y}\,|}$$

müssen uns noch davon überzeugen, dass unsere Lösung auch die Eichbedingung $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ erfüllt:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{c}\operatorname{div}\int d^3y\,\frac{\vec{j}(\vec{y}\,)}{|\vec{x}-\vec{y}\,|} = \frac{1}{c}\int d^3z\,\frac{\operatorname{div}\vec{j}(\vec{x}+\vec{z}\,)}{|\vec{z}\,|} = 0$$

wegen Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ (im statischen Fall)

das Magnetfeld erhält man aus $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$:

$$\begin{aligned} B_i(\vec{x}) &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k(\vec{x}) \\ &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{c}\int d^3y\,\frac{j_k(\vec{y}\,)}{|\vec{x}-\vec{y}\,|} \\ &= -\frac{1}{c}\int d^3y\,\varepsilon_{ijk}\frac{x_j-y_j}{|\vec{x}-\vec{y}\,|^3}\,j_k(\vec{y}\,) \end{aligned}$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3y\,\frac{\vec{j}(\vec{y}\,)\times(\vec{x}-\vec{y}\,)}{|\vec{x}-\vec{y}\,|^3}$$

Bemerkung: wird ein Draht, der durch die Kurve $s \to \vec{z}(s)$ beschrieben wird von einem Strom I durchflossenen, so gelangt man durch die Ersetzung

$$d^3y\,\vec{j}(\vec{y}\,) \to I\,d\vec{z}(s)$$

zum Gesetz von **Biot-Savart**[5]:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{c} \int d\vec{z}(s) \times \frac{\vec{x} - \vec{z}(s)}{|\vec{x} - \vec{z}(s)|^3}$$

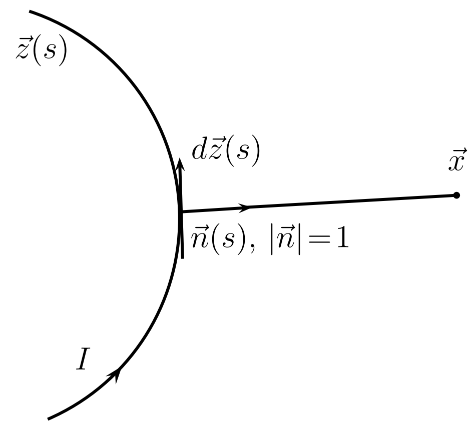


Abbildung 3.24: Stromdurchflossener Draht

Beispiel: berechnen das Magnetfeld eines unendlich langen, geraden, vom Strom I durchflossenen Drahtes nochmals mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes

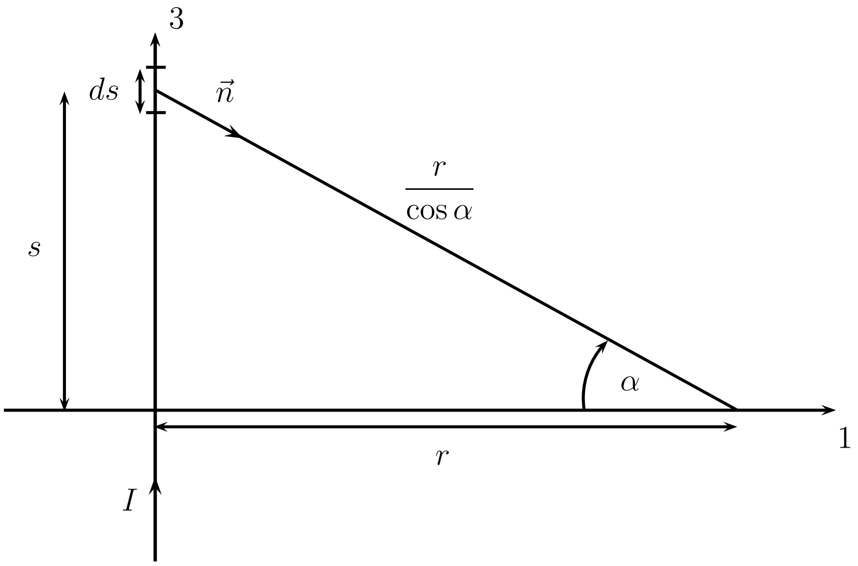


Abbildung 3.25: Berechnung des Magnetfelds mit Hilfe der Formel von Biot-Savart

3-Achse wird in den Draht gelegt, die 1-Achse durch den Punkt, an dem das Feld

[5]Jean-Baptiste Biot (1774-1862), Félix Savart (1791-1841)

berechnet werden soll (siehe Abb. 3.25)

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= r\,\vec{e}_1 \\
\vec{z} &= s\,\vec{e}_3 = r\,\tan\alpha\,\vec{e}_3 \quad \Rightarrow \quad d\vec{z} = d\alpha\,\frac{r}{\cos^2\alpha}\,\vec{e}_3 \\
\vec{n} &= \cos\alpha\,\vec{e}_1 - \sin\alpha\,\vec{e}_3
\end{aligned}$$

Biot-Savart:

$$\begin{aligned}
d\vec{B} &= \frac{I}{cr}\,d\alpha\,\vec{e}_3 \times (\cos\alpha\vec{e}_1 - \sin\alpha\vec{e}_3) = \frac{I}{cr}\,d\alpha\,\cos\alpha\,\vec{e}_2 \\
\vec{B} &= \frac{I}{cr}\,\vec{e}_2 \int\limits_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\alpha\,\cos\alpha = \frac{2I}{cr}\,\vec{e}_2
\end{aligned}$$

stimmt mit den früheren Resultat überein

Beispiel: Magnetfeld einer unendlich langen **Spule**

Spule muss eine dicht gewickelte Säule sein, der Querschnitt ist beliebig (siehe Abb. 3.26)

n ... Anzahl der Windungen pro Länge

I ... durch den Draht fließender Strom

Behauptung: das Feld

$$B_1 = B_2 = 0,\ B_3 = \begin{cases} 4\pi In/c & \text{innen} \\ 0 & \text{außen} \end{cases}$$

löst die Maxwellgleichungen

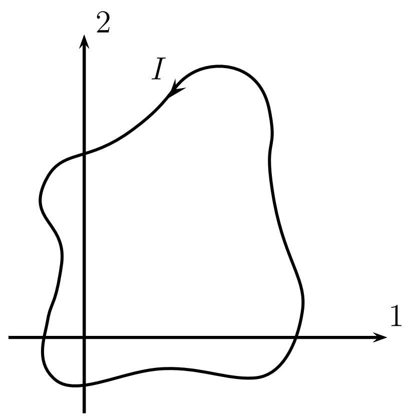


Abbildung 3.26: Spule mit beliebigem Querschnitt

im Innen- und Außenraum gilt $\text{div}\vec{B} = 0$, an der Grenzfläche hat nur B_3 einen Sprung, aber **nicht** in 3-Richtung $\to$ $\text{div}\vec{B} = 0$ gilt auch an der Grenzfläche

im Innen- und Außenraum verschwinden $\vec{j}$ und rot $\vec{B}$ $\to$ man muss

$$\int\limits_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} I_F$$

nur noch für Flächen F überprüfen, welche die Oberfläche der Spule durchschneiden:

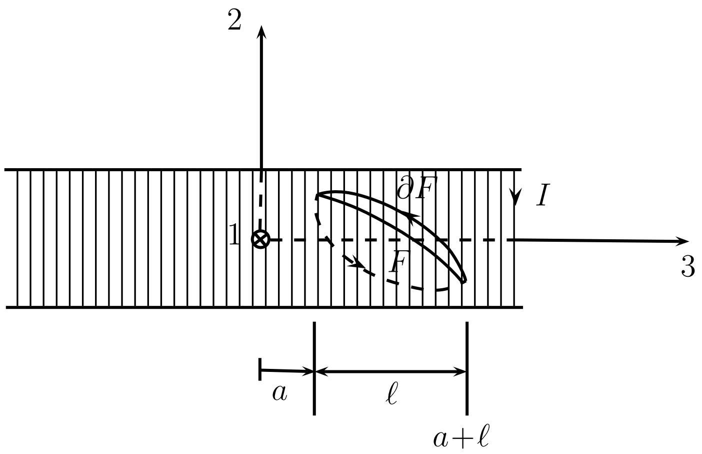


Abbildung 3.27: Fläche F, welche die Oberfläche der Spule durchschneidet

$$\begin{aligned} I_F &= In\ell \\ \int\limits_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B} &= \int\limits_{\partial F|_{\text{innen}}} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi In}{c} \int\limits_{a}^{a+\ell} dx_3 = \frac{4\pi In\ell}{c} = \frac{4\pi}{c} I_F \checkmark \end{aligned}$$

$\to$ für eine mit N Windungen dicht gewickelte, sehr lange Spule der Länge ℓ mit beliebigem Querschnitt gilt: im Außenraum verschwindet das Magnetfeld (außer in der Nähe der Spulenenden), im Inneren ist das Feld

$$B = \frac{4\pi IN}{c\ell}$$

konstant und weist in Richtung der Spulenachse (Rechte-Hand-Regel!)

3.20 Magnetischer Dipol

analog zum elektrischen Feld: auf kleines Gebiet beschränkte Stromverteilung kann (in entsprechendem Abstand) durch **magnetische Multipole** charakterisiert werden

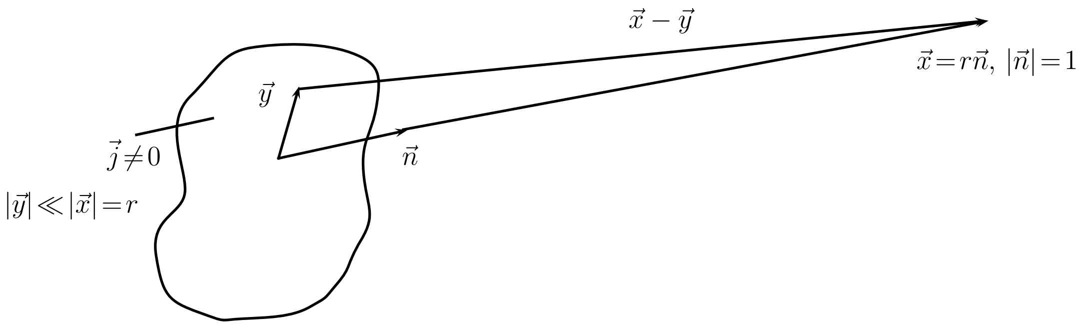


Abbildung 3.28: Multipolentwicklung eines von der Stromverteilung $\vec{j}$ erzeugten Magnetfeldes

$|\vec{y}\,| \ll |\vec{x}| = r$

wissen bereits:

$$\frac{1}{|r\vec{n}-\vec{y}\,|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{n}\cdot\vec{y}}{r^2} + \dots$$

$$\begin{aligned} A_k(r\vec{n}) &= \frac{1}{c}\int d^3y\,\frac{j_k(\vec{y}\,)}{|r\vec{n}-\vec{y}\,|} \\ &= \frac{1}{c}\left(\frac{1}{r}\int d^3y\,j_k(\vec{y}\,) + \frac{n_i}{r^2}\int d^3y\,j_k(\vec{y}\,)\,y_i + \dots\right) \end{aligned}$$

erster Term:

$$0 = \int d^3y\,\underbrace{\frac{\partial j_i(\vec{y}\,)}{\partial y_i}}_{0}\,y_k = \int d^3y\left(\frac{\partial(j_i\,y_k)}{\partial y_i} - j_i\,\underbrace{\frac{\partial y_k}{\partial y_i}}_{\delta_{ik}}\right) = \int df_i\,\underbrace{j_i}_{0\,\text{im}\,\infty}\,y_k - \int d^3y\,j_k(\vec{y}\,)$$

$\Rightarrow \quad \int d^3y\,\vec{j}(\vec{y}\,) = 0$ da $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ und $\vec{j}$ nur im Endlichen $\neq 0$

Beh.: der zweite Term lässt sich folgendermaßen umformen:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \dots, \qquad \vec{m} = \frac{1}{2c}\int d^3y\,\vec{y}\times\vec{j}(\vec{y}\,)$$

$\vec{m}\dots$ **magnetisches Dipolmoment** der Stromverteilung

Bew.:

$$
\begin{aligned}
(\vec{m} \times \vec{n})_k &= \varepsilon_{kli}\, m_l\, n_i = \varepsilon_{kli}\, n_i\, \frac{1}{2c} \int d^3y\, \varepsilon_{lrs}\, y_r\, j_s(\vec{y}\,) \\
&= \frac{n_i}{2c} \left(\delta_{ir}\delta_{ks} - \delta_{is}\delta_{kr}\right) \int d^3y\, y_r\, j_s(\vec{y}\,) \\
&= \frac{n_i}{2c} \int d^3y \left(y_i\, j_k(\vec{y}\,) - y_k\, j_i(\vec{y}\,)\right)
\end{aligned}
$$

verwenden jetzt einen ähnlichen Trick wie vorhin:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int d^3y\, \frac{\partial j_l(\vec{y}\,)}{\partial y_l}\, y_i\, y_k = - \int d^3y\, j_l\, \frac{\partial(y_i\, y_k)}{\partial y_l} \\
&= - \int d^3y\, j_l \left(\delta_{il}\, y_k + y_i\, \delta_{kl}\right) = - \int d^3y \left(j_i\, y_k + j_k\, y_i\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad (\vec{m} \times \vec{n})_k = \frac{n_i}{c} \int d^3y\, y_i\, j_k(\vec{y}\,)
$$

Vektorpotential in der Dipolnäherung: $\vec{A}^d(r\vec{n}) = \vec{m} \times \vec{n}/r^2$

Magnetfeld: $\vec{B}^d = \operatorname{rot} \vec{A}^d$: $B_i^d(r\vec{n}) = (3n_in_j - \delta_{ij})m_j/r^3 + \frac{8\pi}{3} m_i \delta^{(3)}(\vec{x})$

magnetisches **Dipolfeld** (wie Feld eines elektrischen Dipols mit $d_j \to m_j$ für $r \neq 0$, aber im Kontaktterm $-4\pi/3 \to +8\pi/3$!) Kontaktterm bei Berechnung der Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands des Wasserstoffatoms wesentlich!

Beispiel: magnetisches Dipolmoment einer ebenen Leiterschleife, die von einem Strom I durchflossen wird

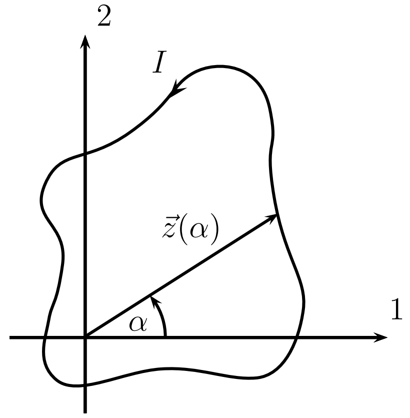


Abbildung 3.29: Magnetisches Dipolmoment einer ebenen Leiterschleife

$$\vec{z}(\alpha) = r(\alpha)\left(\cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin\alpha\,\vec{e}_2\right)$$

$$\frac{d\vec{z}(\alpha)}{d\alpha} = \big(r'(\alpha)\cos\alpha - r(\alpha)\sin\alpha\big)\,\vec{e}_1 + \big(r'(\alpha)\sin\alpha + r(\alpha)\cos\alpha\big)\,\vec{e}_2$$

$$\vec{m} = \frac{I}{2c}\int \vec{z}(\alpha)\times d\vec{z}(\alpha) = \frac{I}{2c}\int_0^{2\pi} d\alpha\; r(\alpha)^2\,\vec{e}_3 = \frac{I}{c}F\vec{e}_3$$

$$\vec{m} = \frac{I}{c}F\vec{n}$$

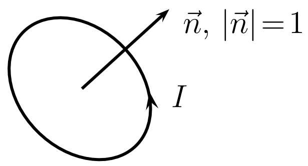


Abbildung 3.30: Rechte-Hand-Regel

3.21 Stromverteilung in einem äußeren Feld

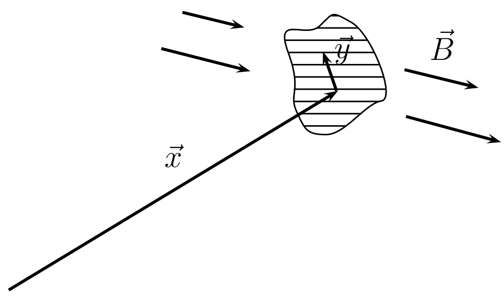


Abbildung 3.31: Stromdichte in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$

wenn in einem Volumselement dV an der Stelle $\vec{x}$ Ladungen q_a, die sich mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}_a$ bewegen, enthalten sind, hat man eine Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{x})\,dV = \sum_{a\,\mathrm{in}\,dV} q_a\vec{v}_a$$

ein **äußeres Magnetfeld** übt auf dieses Volumselement die Kraft

$$d\vec{F}(\vec{x}) = \sum_{a\,\mathrm{in}\,dV} q_a\frac{\vec{v}_a}{c}\times\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\vec{j}(\vec{x})\times\vec{B}(\vec{x})\,dV$$

aus

→ berechnen daher die **Kraft**

$$
\begin{aligned}
\vec{F}(\vec{x}) &= \frac{1}{c}\int d^3y\, \vec{j}(\vec{y}) \times \vec{B}(\vec{x}+\vec{y}) \\
F_i(\vec{x}) &= \frac{1}{c}\int d^3y\, \varepsilon_{ikl}\, j_k(\vec{y}) \underbrace{B_l(\vec{x}+\vec{y})}_{B_l(\vec{x})+y_m\nabla_m B_l(\vec{x})+\dots} \\
&= \nabla_m B_l(\vec{x})\, \varepsilon_{ikl}\, \frac{1}{c}\int d^3y\, y_m\, j_k(\vec{y}) \\
&= \nabla_m B_l(\vec{x})\, \varepsilon_{ikl}\, \underbrace{\frac{1}{2c}\int d^3y\, \left(y_m j_k(\vec{y}) - y_k j_m(\vec{y})\right)}_{\varepsilon_{mks} m_s} \\
&= \underbrace{\varepsilon_{kli}\varepsilon_{ksm}}_{\delta_{ls}\delta_{im}-\delta_{lm}\delta_{is}}\; m_s \nabla_m B_l(\vec{x}) \\
&= m_l \nabla_i B_l(\vec{x}) - m_i \underbrace{\nabla_l B_l(\vec{x})}_{=0} \\
&= \nabla_i \left(\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{x})\right)
\end{aligned}
$$

→ $\vec{F}(\vec{x}) = \mathrm{grad}\left(\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{x})\right)$

→ **potentielle Energie**: $V(\vec{x}) = -\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{x})$

Drehmoment:

$$
\begin{aligned}
\vec{N}(\vec{x}) &= \frac{1}{c}\int d^3y\, \vec{y} \times \left(\vec{j}(\vec{y}) \times \vec{B}(\vec{x}+\vec{y})\right) = \frac{1}{c}\int d^3y\, \vec{y} \times \left(\vec{j}(\vec{y}) \times \vec{B}(\vec{x})\right) + \dots \\
N_i(\vec{x}) &= \frac{1}{c}\int d^3y\, \varepsilon_{ikl}\, y_k\, \varepsilon_{lmn}\, j_m(\vec{y}) B_n(\vec{x}) \\
&= B_n(\vec{x}) \underbrace{\varepsilon_{lik}\varepsilon_{lmn}}_{\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{in}\delta_{km}} \frac{1}{c}\int d^3y\, y_k\, j_m(\vec{y}) \\
&= B_n(\vec{x}) \frac{1}{c}\int d^3y\, \left(y_n j_i(\vec{y}) - \underbrace{y_k j_k(\vec{y})\delta_{in}}_{=0}\right) \\
&= B_n(\vec{x}) \underbrace{\frac{1}{2c}\int d^3y\, \left(y_n j_i(\vec{y}) - y_i j_n(\vec{y})\right)}_{\varepsilon_{nis} m_s} \\
&= \varepsilon_{isn} m_s B_n = (\vec{m}\times\vec{B})_i
\end{aligned}
$$

→ $\vec{N}(\vec{x}) = \vec{m}\times\vec{B}(\vec{x})$

man beachte die Analogie zu den Formeln für den elektrischen Dipol!

3.22 Magnetisches Moment

wir betrachten ein System von Ladungen, die sich zu allen Zeiten in einem endlichen Raumbereich bewegen $\to$ diese Ladungen erzeugen ein Magnetfeld $\vec{B}(t,\vec{x})$

wir interessieren uns für den **zeitlichen Mittelwert** dieses Feldes:

$$\langle\vec{B}\rangle(\vec{x}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\vec{B}(t,\vec{x})$$

beachte: $\langle\vec{B}\rangle$ hängt nur mehr von $\vec{x}$ ab!

wollen jene Gleichungen finden, denen das gemittelte Feld $\langle\vec{B}\rangle$ genügt $\to$ dazu mitteln wir die beiden Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\to \operatorname{div}\langle\vec{B}\rangle = 0, \quad \left\langle\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{rot}\langle\vec{B}\rangle = \frac{4\pi}{c}\langle\vec{j}\rangle$$

Gleichungen der Magnetostatik!

Bemerkung: zeitlicher Mittelwert einer zeitlichen Ableitung verschwindet, weil

$$\left\langle\frac{df}{dt}\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\frac{df}{dt} = \lim_{T\to\infty}\frac{f(T)-f(0)}{T} = 0$$

(wenn $f(T)$ endlich bleibt)

$$\vec{j}(t,\vec{x}) = \sum_a q_a\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_a(t)\right)\vec{v}_a(t)$$

$$\Rightarrow \;\langle\vec{A}\rangle(\vec{x}) = \frac{1}{c}\left\langle\sum_a\frac{q_a\vec{v}_a}{|\vec{x}-\vec{x}_a|}\right\rangle$$

analog:

$$\langle\vec{B}\rangle(\vec{x}) = \operatorname{rot}\langle\vec{A}\rangle(\vec{x}) = \frac{1}{c}\left\langle\sum_a q_a\vec{v}_a\times\frac{\vec{x}-\vec{x}_a}{|\vec{x}-\vec{x}_a|^3}\right\rangle$$

Taylorentwicklung des Integranden:

$$\begin{aligned}
\langle\vec{A}\rangle(\vec{x}) &= \frac{1}{c}\left\langle \sum_a \frac{q_a\vec{v}_a}{|\vec{x}-\vec{x}_a|}\right\rangle \\
&= \frac{1}{c|\vec{x}|}\sum_a q_a \underbrace{\langle\vec{v}_a\rangle}_{=0} - \frac{1}{c}\left\langle \sum_a q_a\vec{v}_a\left(\vec{x}_a\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\right\rangle \\
&= \frac{1}{c|\vec{x}|^3}\left\langle \sum_a q_a\vec{v}_a(\vec{x}_a\cdot\vec{x})\right\rangle
\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\sum_a q_a\vec{v}_a(t)(\vec{x}_a(t)\cdot\vec{x}) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_a q_a\vec{x}_a(t)(\vec{x}_a(t)\cdot\vec{x}) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_a q_a\left[\vec{v}_a(t)(\vec{x}_a(t)\cdot\vec{x}) - \vec{x}_a(t)(\vec{v}_a(t)\cdot\vec{x})\right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \langle\vec{A}\rangle(\vec{x}) = \frac{1}{2c|\vec{x}|^3}\left\langle \sum_a q_a\left[\vec{v}_a(t)(\vec{x}_a(t)\cdot\vec{x}) - \vec{x}_a(t)(\vec{v}_a(t)\cdot\vec{x})\right]\right\rangle$$

Definition des **magnetischen Moments** des Systems (**keine** Mittelung!):

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\sum_a q_a\vec{x}_a\times\vec{v}_a$$

$$\Rightarrow\ \langle\vec{A}\rangle(\vec{x}) = \frac{\langle\vec{m}\rangle\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Zusammenhang des magnetischen Moments mit dem Drehimpuls:

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\sum_a q_a\vec{x}_a\times\vec{v}_a = \frac{1}{2c}\sum_a \frac{q_a}{m_a}\underbrace{\vec{x}_a\times m_a\vec{v}_a}_{\vec{L}_a^{\mathrm{nr}}}$$

falls $q_a/m_a = q/m = \text{const.}\ \forall\, a \Rightarrow$ Zusammenhang zwischen magnetischem Moment und **Bahn**drehimpuls des Systems:

$$\vec{m} = \frac{q}{2mc}\underbrace{\sum_a \vec{L}_a}_{\vec{L}}$$

3.23 Zeitabhängige elektromagnetische Felder

Ausgangspunkt: Maxwellsche Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E}(t,\vec{x}) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\vec{B}(t,\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(t,\vec{x}) + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}(t,\vec{x})}{\partial t} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{div}\vec{E}(t,\vec{x}) &= 4\pi\rho(t,\vec{x}) \\ \operatorname{div}\vec{B}(t,\vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Integralform der Maxwellschen Gleichungen:

wir wissen bereits:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{E} = 4\pi Q_V$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{B} = 0$$

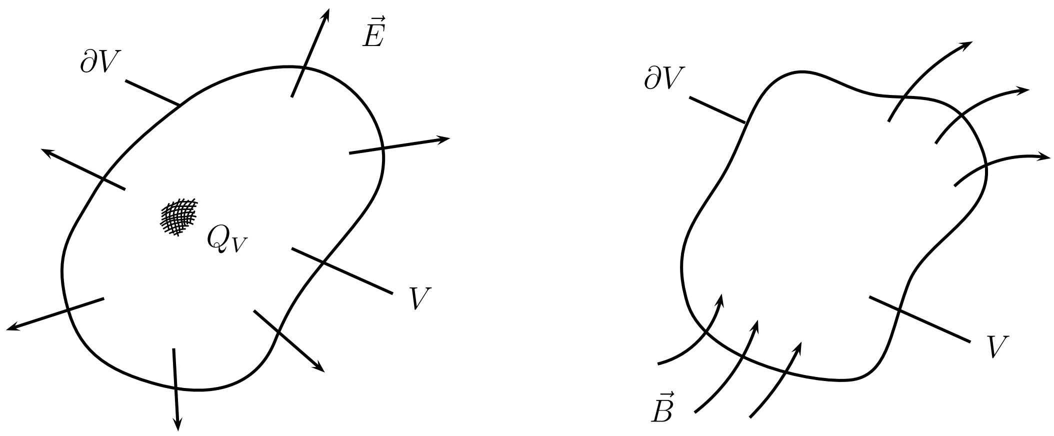


Abbildung 3.32: Fluss des elektrischen und magnetischen Feldes

müssen jetzt noch die Integralform der zwei Maxwellschen Gleichungen mit zeitlichen Ableitungen angeben:

integrieren $\operatorname{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/(c\,\partial t)$ über eine beliebige (zunächst zeitlich unveränderliche) Fläche F:

$$\int\limits_F d\vec{f}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} = \int\limits_{\partial F} d\vec{x}\cdot\vec{E} = -\frac{1}{c}\int\limits_F d\vec{f}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_F d\vec{f}\cdot\vec{B}$$

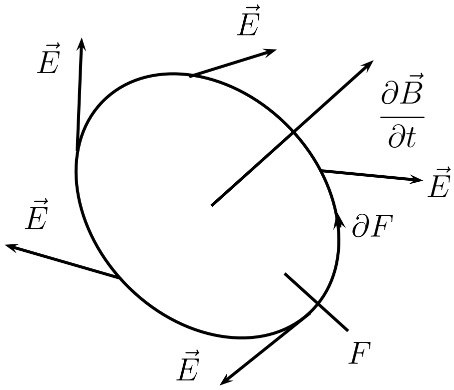


Abbildung 3.33: Induktionsgesetz für eine zeitlich konstante Fläche F

elektromotorische Kraft (für zeitunabhängige Integrationskurve) $\equiv$ Zirkulation von $\vec{E}$ längs $\partial F = \int\limits_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E}$

$$\int\limits_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \underbrace{\int\limits_{F} d\vec{f} \cdot \vec{B}}_{\Phi_B}$$

in Worten: die elektromotorische Kraft längs einer beliebigen geschlossenen Kurve ist gleich minus der zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses durch eine Fläche, deren Rand die betrachtete geschlossene Kurve ist, dividiert durch c

Anwendungsbeispiel:

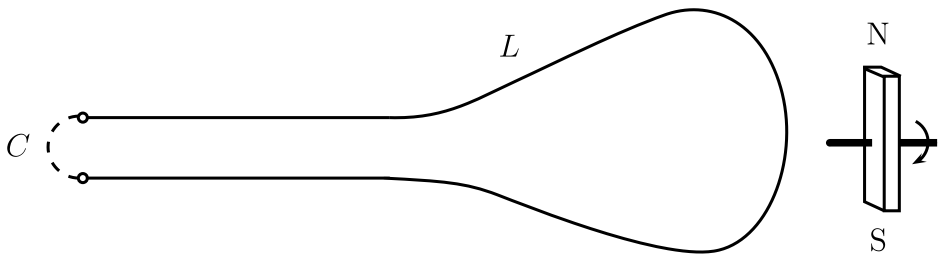


Abbildung 3.34: Ruhende Leiterschleife, zeitlich veränderliches Magnetfeld

lege geschlossene Kurve durch Leiterschleife L ($\vec{E} = 0$ **innerhalb** eines **idealen** widerstandslosen Leiters) und die strichlierte Linie C außerhalb des Leiters

$\longrightarrow$ EMK $= \int\limits_{C} d\vec{x} \cdot \vec{E} = -d\Phi_B/(c\,dt)$ (für Leiter mit verschwindendem Widerstand) was geschieht, wenn der Stabmagnet fest ist, jedoch die Leiterschleife bewegt wird?

$\longrightarrow$ müssen

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{F(t)} d\vec{f}\cdot\vec{B}(t,\vec{x})$$

für den Fall berechnen, dass die Integrationsfläche **zeitabhängig** ist

es handelt sich dabei um die Verallgemeinerung der folgenden Formel für ein eindimensionales Integral:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{a(t)}^{b(t)} dx\, f(t,x) = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} dx\,\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \dot{b}(t)\, f\big(t,b(t)\big) - \dot{a}(t)\, f\big(t,a(t)\big)$$

(Differentiation eines Integrals, dessen Integrand und Grenzen von einem Parameter t abhängen)

Beh.:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{F(t)} d\vec{f}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) = \int\limits_{F(t)} d\vec{f}\cdot\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t} + \int\limits_{F(t)} d\vec{f}\cdot\dot{\vec{x}}\;\mathrm{div}\,\vec{B}(t,\vec{x}) - \int\limits_{\partial F(t)} d\vec{x}\cdot\big(\dot{\vec{x}}\times\vec{B}(t,\vec{x})\big)$$

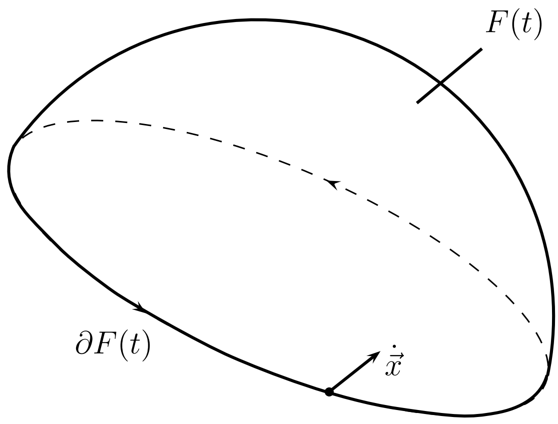


Abbildung 3.35: Zeitlich veränderliche Fläche $F(t)$

der erste Term auf der rechten Seite ist trivial, er rührt von der t-Abhängigkeit von $\vec{B}$ her; ich konzentriere mich daher auf den interessanten Fall $\partial\vec{B}/\partial t = 0$

zu berechnen ist also:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Bigg(\int\limits_{F(t+h)} d\vec{f}\cdot\vec{B}(\vec{x}) - \int\limits_{F(t)} d\vec{f}\cdot\vec{B}(\vec{x})\Bigg)$$

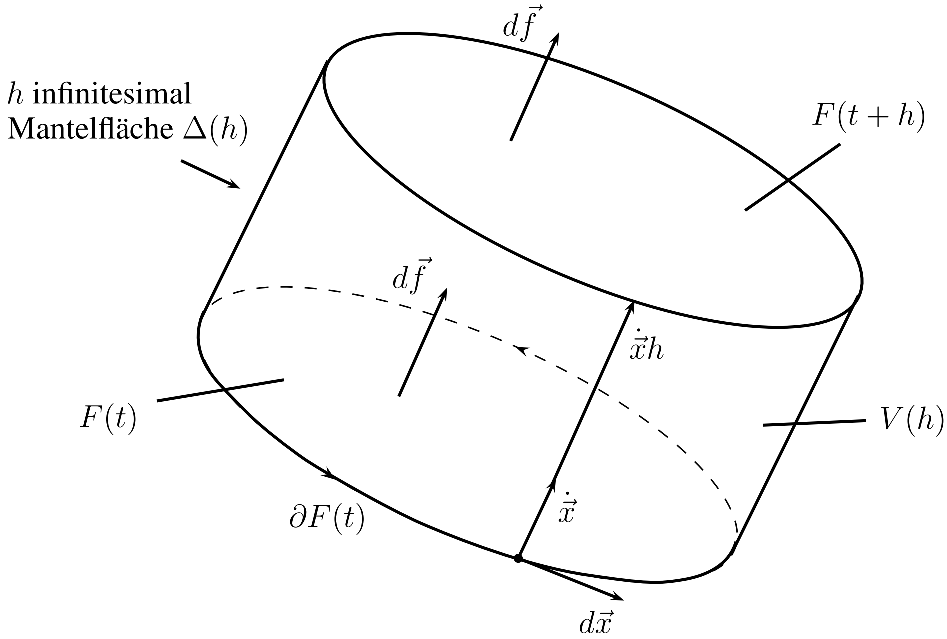


Abbildung 3.36: Bewegung der Integrationsfläche zwischen den Zeitpunkten t und $t+h$

$$
\begin{aligned}
& \int\limits_{F(t+h)} d\vec{f}\cdot\vec{B}(\vec{x}) - \int\limits_{F(t)} d\vec{f}\cdot\vec{B}(\vec{x}) \\
= & \int\limits_{\partial V(h)} d\vec{f}\cdot\vec{B}(\vec{x}) - \int\limits_{\Delta(h)} d\vec{f}\cdot\vec{B}(\vec{x}) \\
= & \int\limits_{V(h)} d^3x\,\mathrm{div}\vec{B}(\vec{x}) - \int\limits_{\partial F(t)} \big(d\vec{x}\times\dot{\vec{x}}h\big)\cdot\vec{B}(\vec{x}) \\
= & \; h\int\limits_{F(t)} d\vec{f}\cdot\dot{\vec{x}}\,\mathrm{div}\vec{B}(\vec{x}) - h\int\limits_{\partial F(t)} d\vec{x}\cdot\big(\dot{\vec{x}}\times\vec{B}(\vec{x})\big)
\end{aligned}
$$

Anwendung auf den Fall des Magnetfeldes ($\mathrm{div}\,\vec{B}=0$):

$$
\begin{aligned}
\underbrace{\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_{F(t)} d\vec{f}\cdot\vec{B}(t,\vec{x})}_{\Phi_B} &= \int\limits_{F(t)} d\vec{f}\cdot\underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t}}_{-\mathrm{rot}\vec{E}} - \int\limits_{\partial F(t)} d\vec{x}\cdot\left(\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\times\vec{B}(t,\vec{x})\right) \\
&= \underbrace{-\int\limits_{\partial F(t)} d\vec{x}\cdot\left(\vec{E}+\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\times\vec{B}\right)}_{\mathrm{EMK}}
\end{aligned}
$$

allgemeiner Fall daher:

$$\text{EMK} := \int_{\partial F(t)} d\vec{x} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Karikatur eines Generators:

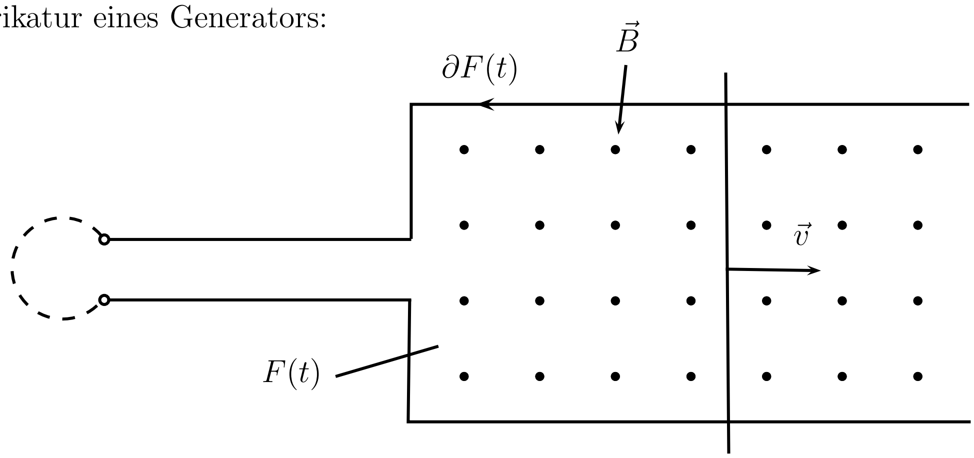


Abbildung 3.37: Der Rand der zeitlich veränderlichen Fläche $F(t)$ wird gebildet aus dem mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten beweglichen Drahtstück, dem daran anschließenden oberen (fixen) Drahtstück bis zur strichlierten Kurve, der außerhalb des Leiters befindlichen strichlierten Kurve und schließlich dem unteren Drahtstück zurück zu dem darauf gleitenden beweglichen Leiter

in einem idealen (widerstandsfreien) Leiter verschwindet die Kraft (pro Ladungseinheit) $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}/c$ und in dem Ausdruck für die EMK trägt wieder nur der strichlierte Teil der Integrationskurve bei

analoge Vorgangsweise für Maxwell-Gleichung

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Integration über Fläche F und Anwendung des Satzes von Stokes ergibt:

$$\underbrace{\int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{B}}_{Z_B} = \int_F d\vec{f} \cdot \text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}}_{I_F} + \frac{1}{c} \int_F d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ... **Maxwellscher Verschiebungsstrom**

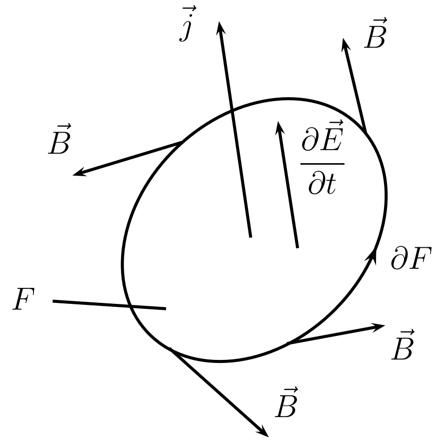


Abbildung 3.38: Erzeugung eines Magnetfeldes durch einen Strom oder ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld

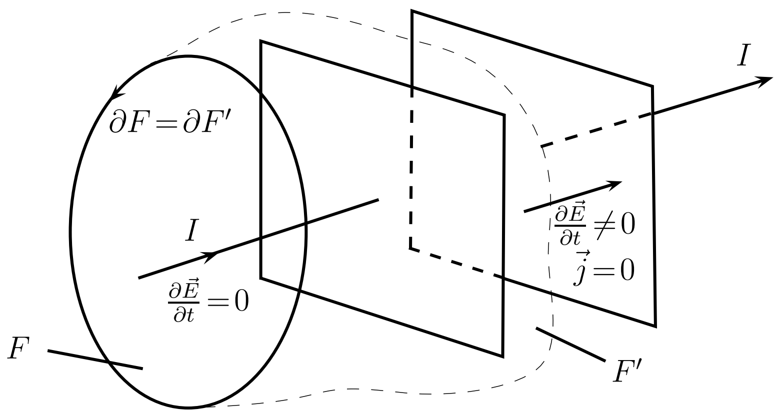


Abbildung 3.39: Maxwellscher Verschiebungsstrom

Beispiel: Kondensator wird geladen:

$$Z_B = \int\limits_{\partial F = \partial F'} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \int\limits_{F} d\vec{f} \cdot \vec{j} = \frac{1}{c} \int\limits_{F'} d\vec{f} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

zum Zeitpunkt t befinde sich die Ladung $Q(t)$ auf der linken Kondensatorplatte

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \;\Rightarrow\; E(t)A = 4\pi Q(t)$$

$A \ldots$ Fläche der Kondensatorplatte; Randeffekte vernachlässigt

$$\Rightarrow \;\frac{dE(t)}{dt} = \frac{4\pi}{A}\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{4\pi I}{A}$$

tatsächlich:

$$\frac{4\pi}{c}\int\limits_F d\vec{f}\cdot\vec{j} = \frac{4\pi I}{c}, \qquad \frac{1}{c}\int\limits_{F'} d\vec{f}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{A}{c}\frac{dE(t)}{dt} = \frac{4\pi I}{c} \ \checkmark$$

Bemerkung zu den relativen Vorzeichen in

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$\partial\vec{B}/\partial t \to I \to \vec{B}_{\mathrm{ind}}$ (Lenzsche[6] Regel)

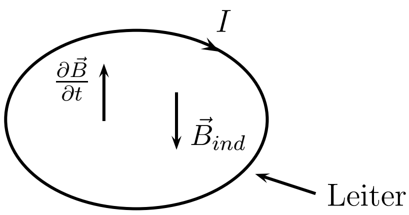


Abbildung 3.40: Lenzsche Regel

3.24 Energiedichte und Energiestrom

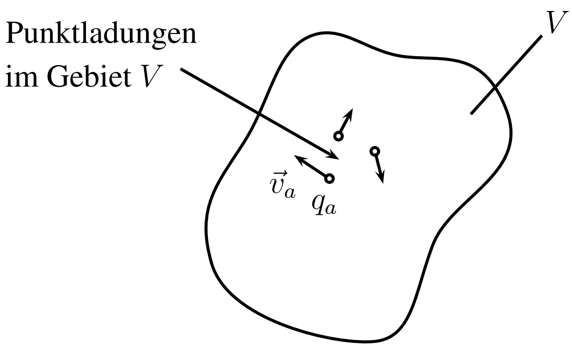


Abbildung 3.41: Punktladungen und elektromagnetisches Feld im Gebiet V

bilden die Summe der Energien

$$\mathcal{E}_a = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\vec{v}_a^2/c^2}}$$

[6]Heinrich Friedrich **Emil** Lenz (1804-1865)

aller im Gebiet V befindlichen Teilchen und betrachten ihre zeitliche Änderung:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sum_{\vec{x}_a\in V}\mathcal{E}_a &= \sum_{\vec{x}_a\in V} q_a\,\vec{v}_a\cdot\vec{E}\big(t,\vec{x}_a(t)\big)\\
&= \int\limits_V d^3x\,\vec{j}(t,\vec{x})\cdot\vec{E}(t,\vec{x})\\
&= \int\limits_V d^3x\left(\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\,\vec{B}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E}\\
&= \int\limits_V d^3x\left(\frac{c}{4\pi}\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial t}\right)
\end{aligned}$$

Bemerkung: Umformung von erster auf zweite Zeile durch

$$\vec{j}(t,\vec{x})=\sum_a q_a\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_a(t))\,\vec{v}_a$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B} &= E_i\varepsilon_{ijk}\nabla_j B_k\\
&= \varepsilon_{ijk}\nabla_j(E_iB_k)-\varepsilon_{ijk}(\nabla_jE_i)B_k\\
&= -\nabla_j(\varepsilon_{jik}E_iB_k)+B_k\varepsilon_{kji}\nabla_jE_i\\
&= -\mathrm{div}\,(\vec{E}\times\vec{B})+\vec{B}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E}\\
&= -\mathrm{div}\,(\vec{E}\times\vec{B})-\vec{B}\cdot\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
&= -\mathrm{div}\,(\vec{E}\times\vec{B})-\frac{1}{2c}\frac{\partial\vec{B}^2}{\partial t}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\sum_{\vec{x}_a\in V}\mathcal{E}_a=-\frac{c}{4\pi}\int\limits_{\partial V}d\vec{f}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})-\frac{1}{8\pi}\int\limits_V d^3x\,\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)$$

V zeitlich konstant:

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\Bigg(\sum_{\vec{x}_a\in V}\mathcal{E}_a+\int\limits_V d^3x\,\underbrace{\frac{(\vec{E}^2+\vec{B}^2)}{8\pi}}_{\eta}\Bigg)=-\int\limits_{\partial V}d\vec{f}\cdot\underbrace{\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{B})}_{\vec{S}}$$

$\eta:=\dfrac{(\vec{E}^2+\vec{B}^2)}{8\pi}$ … **Energiedichte** des elektromagnetischen Feldes

$\vec{S} := \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}\ldots$ **Poyntingvektor**[7] (Energiestromdichte)

lokale Form der Energieerhaltung:

$$\int\limits_V d^3x \left(\frac{\partial\eta}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} + \vec{j}\cdot\vec{E}\right) = 0$$

V beliebig

$$\Rightarrow \frac{\partial\eta}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0$$

(Kontinuitätsgleichung)

Gesamtenenergie:

$$V \to \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \frac{d}{dt}\left(\sum_a \mathcal{E}_a + \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \underbrace{\frac{(\vec{E}^2+\vec{B}^2)}{8\pi}}_{\eta}\right) = 0$$

Bemerkung: Oberflächenterm verschwindet im Unendlichen, da angenommen wird, dass das elektromagnetische Feld für $|\vec{x}|\to\infty$ genügend stark abfällt

3.25 Impulsdichte und Impulsstrom

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int\limits_V d^3x\,\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c} &= \frac{1}{4\pi c}\int\limits_V d^3x\,\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} + \vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\\
&= \frac{1}{4\pi c}\int\limits_V d^3x\,\left[\left(c\operatorname{rot}\vec{B} - 4\pi\vec{j}\right)\times\vec{B} + \vec{E}\times\left(-c\operatorname{rot}\vec{E}\right)\right]
\end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot}\vec{B}\times\vec{B})_i &= \varepsilon_{ijk}(\operatorname{rot}\vec{B})_j B_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}(\nabla_l B_m)B_k\\
&= (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})(\nabla_l B_m)B_k = (\nabla_k B_i)B_k - (\nabla_i B_k)B_k\\
&= \nabla_k(B_iB_k) - \frac{1}{2}\nabla_i\vec{B}^2,\\
(\operatorname{rot}\vec{E}\times\vec{E})_i &= (\nabla_k E_i)E_k - (\nabla_i E_k)E_k\\
&= \nabla_k(E_iE_k) - \frac{1}{2}\nabla_i\vec{E}^2 - E_i\underbrace{\operatorname{div}\vec{E}}_{4\pi\rho}
\end{aligned}$$

[7] John Henry Poynting (1852-1914)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int\limits_V d^3x\,\frac{(\vec{E}\times\vec{B})_i}{4\pi c} &= \int\limits_V d^3x\,\Big[-\rho E_i - \frac{1}{c}\left(\vec{j}\times\vec{B}\right)_i \\
&+ \frac{1}{4\pi}\nabla_k\left(E_iE_k + B_iB_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right)\right)\Big]
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\int\limits_V d^3x\,\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c} + \sum_{\vec{x}_a\in V}\vec{p}_a\right]_i = \int\limits_{\partial V} df_k\,\underbrace{\frac{1}{4\pi}\left[E_iE_k + B_iB_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right)\right]}_{\sigma_{ik}}$$

$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}\ldots$ **Maxwellscher Spannungstensor**

$\sigma_{ik}df_k = i$-te Komponente der Kraft auf das Flächenelement $d\vec{f}$

lokale Form der Impulserhaltung (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{(\vec{E}\times\vec{B})_i}{4\pi c} - \nabla_k\sigma_{ik} + \rho E_i + \frac{1}{c}(\vec{j}\times\vec{B})_i = 0$$

Gesamtimpuls:

$$V\to\mathbb{R}^3 \qquad \to \qquad \frac{d}{dt}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3x\,\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c} + \sum_a \vec{p}_a\right] = 0$$

Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes: $\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c} = \frac{\vec{S}}{c^2}$

Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes:

$$T_F^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(-F^{\mu\rho}F^{\nu}_{\ \rho} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})$$

$$T_F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \eta & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Kontinuitätsgleichung (Energie-Impulserhaltung) in vierdimensionaler Form:

$$\partial_\mu T_F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c}F^{\nu\rho}j_\rho$$

(diese Formel erhält man durch Verwendung der Maxwell-Gleichungen in vierdimensionaler Schreibweise)

Bemerkung: für die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors eines beliebigen Systems gilt **allgemein**: $T^{00}\ldots$ Energiedichte $\to\ \int d^3x\, T^{00}\ldots$ Energie

$T^{0i}/c\ldots$ Impulsdichte $\to\ \ P^i = \int d^3x\, T^{0i}/c\ldots$ Impuls

Energie-Impuls-Tensor der **Teilchen**:

$$\begin{aligned} T_T^{\mu\nu}(t,\vec{x}) &= c\sum_a m_a\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_a(t)\right)\underbrace{\frac{dx_a^\mu(t)}{ds_a}}_{u_a^\mu}\frac{dx_a^\nu(t)}{dt} \\ &= c\sum_a m_a\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_a(t)\right)u_a^\mu u_a^\nu\frac{ds_a}{dt} \\ &= c^2\sum_a\int ds_a\, m_a\delta^{(4)}\left(x-x_a(s)\right)u_a^\mu u_a^\nu \end{aligned}$$

$\to$ Energiedichte der Teilchen:

$$T_T^{00}(x) = \sum_a \frac{m_a c^2}{\sqrt{1-\vec{v}_a^{\,2}/c^2}}\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_a(t)\right)\ \checkmark$$

$\to$ Impulsdichte der Teilchen:

$$T_T^{0i}(x)/c = \sum_a \frac{m_a v_a^i}{\sqrt{1-\vec{v}_a^{\,2}/c^2}}\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_a(t)\right)\ \checkmark$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_T^{\mu\nu}(x) &= c\sum_a\partial_\mu\left[m_a\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_a(t)\right)\frac{dx_a^\mu}{dt}\right]u_a^\nu \\ &+ c\sum_a m_a\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_a(t)\right)\underbrace{\frac{dx_a^\mu}{dt}\partial_\mu u_a^\nu}_{\frac{du_a^\nu}{dt}} \end{aligned}$$

der erste Term verschwindet (Massenerhaltung):

$$\partial_\mu\left[\delta^{(3)}\left(\vec{x}-\vec{x}_a(t)\right)\frac{dx_a^\mu}{dt}\right] = 0$$

Bemerkung: völlig analog zu $\partial_\mu j^\mu = 0$ für 4-Stromdichte von Punkladungen (Ladungserhaltung)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ \partial_\mu T_T^{\mu\nu}(x) &= c\sum_a m_a \delta^{(3)}\left(\vec{x} - \vec{x}_a(t)\right) \frac{du_a^\nu}{dt} \\
&= \sum_a \delta^{(3)}\left(\vec{x} - \vec{x}_a(t)\right) \frac{dp_a^\nu}{dt} \\
&= \frac{1}{c}\sum_a q_a \delta^{(3)}\left(\vec{x} - \vec{x}_a(t)\right) F^{\nu\rho}(x_a)\frac{dx_{a\rho}}{dt} \\
&= \frac{1}{c}F^{\nu\rho}(x) j_\rho(x)
\end{aligned}$$

kombiniert mit dem früheren Ergebnis:

$$\partial_\mu T_F^{\mu\nu} + \underbrace{\frac{1}{c}F^{\nu\rho} j_\rho}_{\partial_\mu T_T^{\mu\nu}} = 0$$

$T_{\text{ges}}^{\mu\nu} = T_F^{\mu\nu} + T_T^{\mu\nu} \ldots$ **Gesamt**-Energie-Impuls-Tensor (Feld und Teilchen)

$$\partial_\mu T_{\text{ges}}^{\mu\nu} = 0 \ \Rightarrow \ \mathcal{E}_{\text{ges}} = \int d^3x \, T_{\text{ges}}^{00}(x) = \text{ const}, \ P_{\text{ges}}^i = \int d^3x \, T_{\text{ges}}^{0i}(x)/c = \text{ const}$$

Bemerkung: die **Drehimpulsdichte des elektromagnetischen Feldes** (bezüglich des Koordinatenursprungs) ist das Kreuzprodukt von $\vec{x}$ und der Impulsdichte des Feldes:

$$\vec{x} \times \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c}$$

Beweis analog zu Energie und Impuls: man zeigt, dass sich in

$$\frac{d}{dt}\left[\int_V d^3x \, \vec{x} \times \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c} + \sum_{\vec{x}_a \in V} \vec{x}_a \times \vec{p}_a\right] = \ldots$$

auf der rechten Seite $(\ldots)$ ein Oberflächenintegral ergibt, das als jenes **Drehmoment** zu interpretieren ist, welches auf das Gebiet V wirkt

3.26 Elektromagnetische Wellen

elektromagnetisches Feld im „Vakuum“ ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) $\longrightarrow$ **homogene** Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}(t,\vec{x}) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t} \qquad & \operatorname{div} \vec{E}(t,\vec{x}) &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B}(t,\vec{x}) &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}(t,\vec{x})}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{B}(t,\vec{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel für nichttriviale Lösung: **ebene Welle**

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{\varepsilon}\, f(t - \vec{n}\cdot\vec{x}/c), \quad \vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{n} \times \vec{E}(t,\vec{x}), \quad |\vec{\varepsilon}\,| = |\vec{n}| = 1, \quad \vec{\varepsilon}\cdot\vec{n} = 0$$

Bemerkungen: f ist eine beliebige (differenzierbare) Funktion; $|\vec{B}| = |\vec{E}|$

wieso **ebene** Welle?

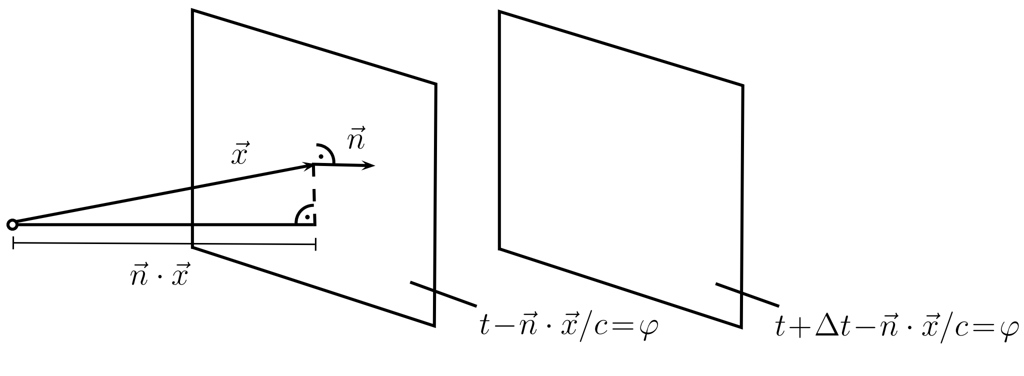


Abbildung 3.42: Flächen konstanter Phase bei einer ebenen Welle

betrachte Argument $\varphi = t - \vec{n}\cdot\vec{x}/c$ der Funktion f

für festgehaltene Werte von φ und t hat das elektromagnetische Feld in der durch die Gleichung

$$\vec{n}\cdot\vec{x} = ct - \varphi c$$

gegebenen Ebene überall den gleichen Wert

die Ebene mit der „Phase“ φ bewegt sich mit der Geschwindigkeit c in Richtung des Einheitsvektors $\vec{n}$ weiter

Poyntingvektor:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E}) = \frac{c}{4\pi}f^2\vec{\varepsilon}\times(\vec{n}\times\vec{\varepsilon}) = \frac{c}{4\pi}f^2\vec{n}\\ &= \frac{c}{4\pi}\underbrace{\vec{E}^2}_{=\vec{B}^2}\vec{n} = \frac{c}{8\pi}(\vec{E}^2+\vec{B}^2)\vec{n} = c\eta\vec{n}\end{aligned}$$

Energiestrom = Energiedichte $\times$ Lichtgeschwindigkeit in Richtung von $\vec{n}$

Spezialfall: **monochromatische** ebene Welle

$$f(t-\vec{n}\cdot\vec{x}/c) = E_0\cos(\omega t - \omega\vec{n}\cdot\vec{x}/c+\alpha)$$

$\vec{k} = \omega\vec{n}/c\ldots$ **Wellenzahlvektor**

$\omega = 2\pi\nu\ldots$ **Kreisfrequenz**

$\nu\ldots$ **Frequenz**

$\lambda = 2\pi c/\omega = c/\nu\ldots$ **Wellenlänge**

$|\vec{k}| = \omega/c = 2\pi/\lambda$

3.27 Wellengleichung

drücken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch ϕ und $\vec{A}$ aus:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

wählen die **Coulombeichung**

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$$

$\to$ im Fall $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ kann dann auch $\phi = 0$ gewählt werden

Einsetzen von

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

in

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

ergibt

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A} = \mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{A}}_{=0} - \Delta\vec{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

und somit die **Wellengleichung**

$$\underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)}_{\Box} \vec{A} = 0$$

$\Box \dots$ d'Alembert-Operator[8]

Bemerkungen: auch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ erfüllen die Wellengleichung; $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ ist wegen $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ ebenfalls erfüllt

3.28 Ebene Wellen

Spezialfall: Feld hängt nur von **einer** Ortskoordinate (etwa x) und der Zeit ab

$\rightarrow$ jede Komponente von $\vec{E}$, $\vec{B}$ oder $\vec{A}$ erfüllt dann die Wellengleichung in einer Raumdimension:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

Einführung von neuen Variablen:

$$\xi = t - \frac{x}{c},\ \eta = t + \frac{x}{c} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}(\xi + \eta),\ x = \frac{c}{2}(\eta - \xi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Wellengleichung nimmt in den neuen Variablen eine besonders einfache Form an:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = g(\eta) \quad \Rightarrow \quad f(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

Lösung als Funktion der ursprünglichen Variablen t, x:

$$f(t, x) = f_1(t - x/c) + f_2(t + x/c)$$

f_1 läuft mit Geschwindigkeit c nach rechts, f_2 mit Geschwindigkeit c nach links (siehe Abb. 3.43)

[8] Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783)

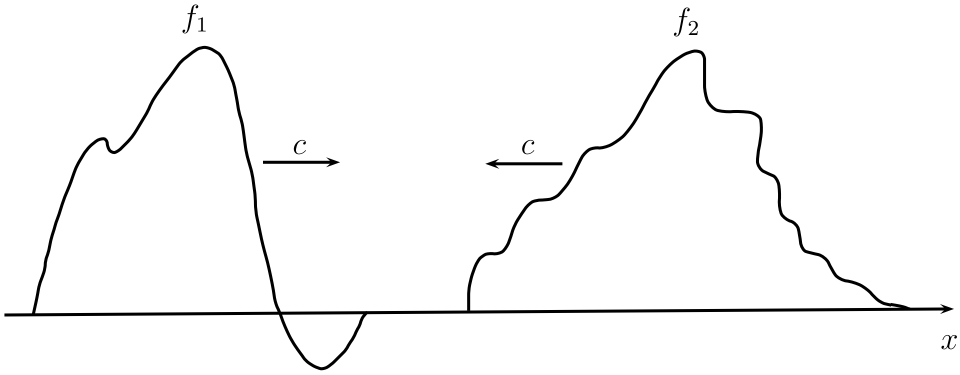


Abbildung 3.43: Allgemeine Lösung der Wellengleichung in einer Raumdimension

Vektorpotential erfüllt die Gleichungen $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ und $\Box\,\vec{A} = 0$

in unserem Fall ist $\vec{A} = \vec{A}(t, x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial A_x(t,x)}{\partial x} = 0, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_i(t,x)}{\partial x^2} = 0, \quad i = x, y, z$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 A_x(t,x)}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x(t,x) = at + b \quad \Rightarrow \quad E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{a}{c}$$

$\rightarrow a \neq 0$ entspricht zeitunabhängigem, longitudinalem elektrischem Feld $\rightarrow$ interessiert uns aber nicht; man kann ja immer ein zeitlich konstantes Feld superponieren $\rightarrow a = 0$; setzen auch $b = 0$, da ohnehin unbeobachtbar $\rightarrow$ Vektorpotential einer ebenen Welle kann immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle gewählt werden

betrachten ebene elektromagnetische Welle, die sich **nur** in Richtung der **positiven** x-Achse fortpflanzt $\rightarrow \vec{A}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ sind dann nur Funktionen von $t - x/c$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\vec{A}'$$

(Strich bedeutet Ableitung nach $t - x/c$)

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{\nabla}(t - x/c)\times\vec{A}' = -\frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{A}'$$

$\vec{n}\ldots$ Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung der Welle

$$\Rightarrow \quad \vec{B} = \vec{n}\times\vec{E}$$

$\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{n}$, $\vec{E} \perp \vec{B}$, $|\vec{E}| = |\vec{B}|$

3.29 Monochromatische ebene Welle

Zeitabhängigkeit von der Form $\cos(\omega t + \alpha)$

Ausbreitung z.B. längs der x-Achse: Feldkomponenten sind Funktionen von $t - x/c$

Vektorpotential einer derartigen Welle lässt sich am bequemsten durch den Realteil einer **komplexen** Größe darstellen:

$$\vec{A} = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathbb{A}}_0 \, e^{-i\omega(t-x/c)}\right]$$

($\vec{\mathbb{A}}_0$ ist ein konstanter komplexer Vektor)

Notation: $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \ldots$ komplexe Größen; $A, B, \ldots$ dazugehörige reelle Größen:

$$A = \mathrm{Re}\,\mathbb{A} = (\mathbb{A} + \mathbb{A}^*)/2$$

mit Hilfe des Wellen(zahl)vektors $\vec{k} = \omega\vec{n}/c$ schreibt man:

$$\vec{A} = \mathrm{Re}\left[\vec{\mathbb{A}}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}\right]$$

- solange wir an unseren Größen nur **lineare** Operationen durchführen, können wir das Re-Zeichen weglassen und mit den komplexen Größen selbst rechnen
- bei **Produkten** dieser Größen wird die Sache etwas komplizierter:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}(t) &= \mathbb{A}_0 \, e^{-i\omega t}, \qquad \mathbb{B}(t) = \mathbb{B}_0 \, e^{-i\omega t} \\
A(t) &= \mathrm{Re}\,\mathbb{A}(t), \qquad B(t) = \mathrm{Re}\,\mathbb{B}(t) \\
A(t)B(t) &= \frac{1}{4}\left(\mathbb{A}_0 \, e^{-i\omega t} + \mathbb{A}_0^* \, e^{+i\omega t}\right)\left(\mathbb{B}_0 \, e^{-i\omega t} + \mathbb{B}_0^* \, e^{+i\omega t}\right)
\end{aligned}$$

zeitlicher Mittelwert von $A(t)B(t)$:

$$\langle A(t)B(t)\rangle = \frac{1}{4}\left(\mathbb{A}_0\mathbb{B}_0^* + \mathbb{A}_0^*\mathbb{B}_0\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbb{A}(t)\mathbb{B}(t)^*\right]$$

Vektorpotential, elektrisches und magnetisches Feld in komplexer Notation:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbb{A}} &= \vec{\mathbb{A}}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} \\
\vec{\mathbb{E}} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\mathbb{A}}}{\partial t} = i\frac{\omega}{c}\vec{\mathbb{A}} = i|\vec{k}|\vec{\mathbb{A}} \\
\vec{\mathbb{B}} &= \mathrm{rot}\,\vec{\mathbb{A}} = i\vec{k} \times \vec{\mathbb{A}}
\end{aligned}$$

$$\vec{\mathbb{E}} = \underbrace{\vec{\mathbb{E}}_0}_{i|\vec{k}|\vec{\mathbb{A}}_0} \; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \qquad \rightarrow \qquad \vec{E} = \mathrm{Re}\,\vec{\mathbb{E}} = \mathrm{Re}\left(\vec{\mathbb{E}}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right)$$

definieren den Winkel α durch $\vec{\mathbb{E}}_0^2 = |\vec{\mathbb{E}}_0^2|\, e^{-2i\alpha}$ ($\vec{\mathbb{E}}_0^2$ ist i. Allg. komplex!) und schreiben $\vec{\mathbb{E}}_0 = \vec{b}\, e^{-i\alpha}$; dadurch wird der i. Allg. ebenfalls komplexe Vektor $\vec{b}$ definiert; dessen Quadrat ist:

$$\vec{b}^{\,2} = \vec{\mathbb{E}}_0^2 e^{2i\alpha} = |\vec{\mathbb{E}}_0^2| \geq 0$$

das elektrische Feld erhält also die Form $\vec{\mathbb{E}} = \vec{b}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t-\alpha)}$

zerlegen $\vec{b}$ in Real- und Imaginärteil: $\vec{b} = \vec{b}_1 + i\,\vec{b}_2$, $\vec{b}_{1,2}$ reell

wir wissen bereits, dass das Quadrat von $\vec{b}$ rein rell (und nicht negativ) ist:

$$\vec{b}^{\,2} = \vec{b}_1^2 - \vec{b}_2^2 + 2\,i\,\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b}_1\cdot\vec{b}_2 = 0$$

$\rightarrow$ wähle y-Achse des Koordinatensystems in Richtung von $\vec{b}_1$, d.h.

$$\vec{b}_1 = b_1\,\vec{e}_y, \quad b_1 = |\vec{b}_1|, \qquad \vec{b}_2 = \pm\, b_2\,\vec{e}_z, \quad b_2 = |\vec{b}_2|$$

(siehe Abb. 3.44)

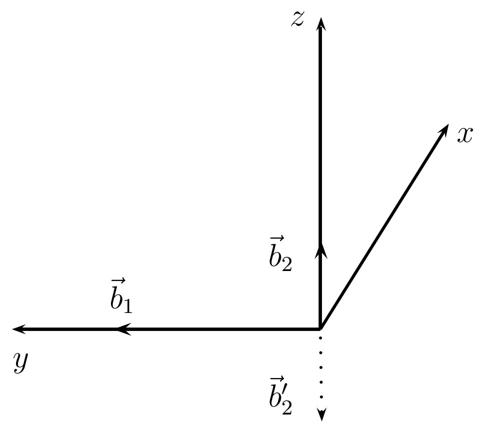


Abbildung 3.44: Monochromatische ebene Welle in Richtung der positiven x-Achse; Wahl der y-Achse in Richtung von $\vec{b}_1$; der auf $\vec{b}_1$ normal stehende Vektor $\vec{b}_2$ kann entweder in Richtung der positiven oder in Richtung der negativen z-Achse weisen

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbb{E}} &= \underbrace{(b_1\,\vec{e}_y \pm i b_2\,\vec{e}_z)}_{\vec{b}}\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t-\alpha)} \\
&= (b_1\,\vec{e}_y \pm i b_2\,\vec{e}_z)\,\Big(\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t-\alpha) + i\sin(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t-\alpha)\Big) \\
\vec{E} &= \mathrm{Re}\,\vec{\mathbb{E}} \quad \Rightarrow \quad E_y = b_1\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}+\alpha), \quad E_z = \pm b_2\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x}+\alpha)
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ für festgehaltenes $\vec{x}$ bewegt sich der $\vec{E}$-Vektor auf einer Ellipse mit den Halbachsen $b_{1,2}$ (**elliptisch polarisierte** Welle): $E_y^2/b_1^2 + E_z^2/b_2^2 = 1$

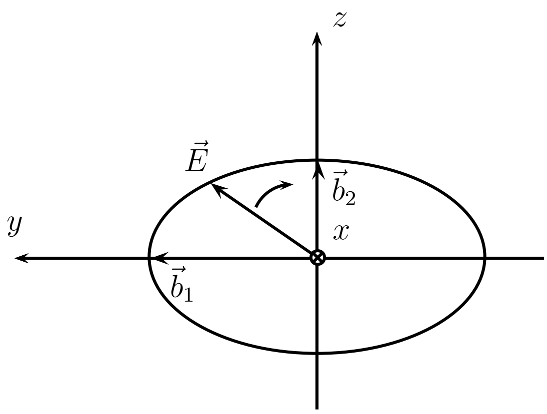


Abbildung 3.45: Elliptisch polarisierte Welle mit Ausbreitung in Richtung der positiven x-Achse (in die Zeichenebene hinein); der Vektor $\vec{b}_2$ zeigt in Richtung der positiven z-Achse $\rightarrow$ $\vec{E}$-Vektor dreht sich im Uhrzeigersinn

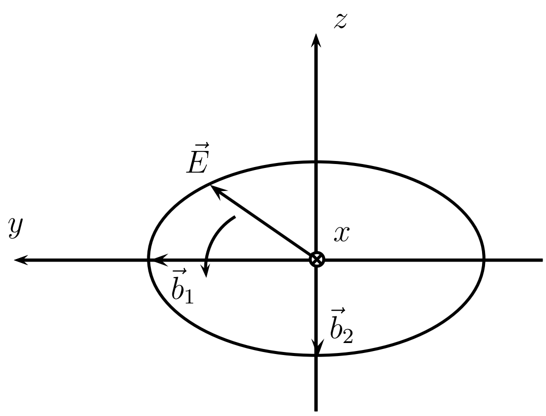


Abbildung 3.46: Elliptisch polarisierte Welle mit Ausbreitung in Richtung der positiven x-Achse (in die Zeichenebene hinein); der Vektor $\vec{b}_2$ zeigt in Richtung der negativen z-Achse $\rightarrow$ $\vec{E}$-Vektor dreht sich gegen den Uhrzeigersinn

Spezialfälle:

- $b_1 = b_2$ Ellipse $\rightarrow$ Kreis $\rightarrow$ **zirkular polarisierte** Welle ($\mathbb{E}_{0z}/\mathbb{E}_{0y} = \pm i$)
- $b_2 = 0 \rightarrow$ **linear polarisierte** Welle

elliptisch polarisierte Welle = **Überlagerung** von zwei linear polarisierten Wellen

Magnetfeld: $\vec{\mathbb{B}} = \vec{n} \times \vec{\mathbb{E}}$ berechne daher:

$$\vec{n} \times \vec{\mathbb{E}}_0 = \vec{e}_x \times (b_1\,\vec{e}_y \pm\, i\,b_2\,\vec{e}_z) = \mp\,i\,b_2\,\vec{e}_y + b_1\,\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbb{B}} &= \vec{n} \times \vec{\mathbb{E}} = (\mp\,i\,b_2\,\vec{e}_y + b_1\,\vec{e}_z)\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t-\alpha)} \\
&= (\mp\,i\,b_2\,\vec{e}_y + b_1\,\vec{e}_z)\,\Big(\cos(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t-\alpha) + i\sin(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t-\alpha)\Big) \\
\vec{B} &= \mathrm{Re}\,\vec{\mathbb{B}} \quad \Rightarrow \quad B_y = \mp\,b_2\sin(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}+\alpha), \quad B_z = b_1\cos(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}+\alpha)
\end{aligned}$$

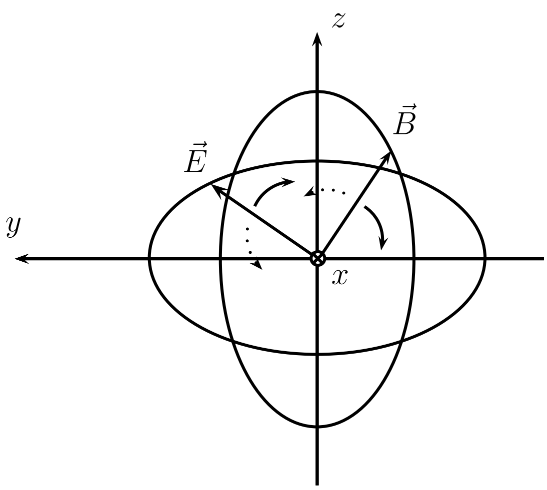


Abbildung 3.47: Elektrisches und magnetisches Feld einer elliptisch polarisierten Welle

Poyntingvektor:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}^2\,\vec{n} = \frac{c}{4\pi}\left[b_1^2\cos^2(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}+\alpha) + b_2^2\sin^2(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}+\alpha)\right]\vec{n}$$

zeitlicher Mittelwert des Poyntingvektors:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{4\pi}\frac{b_1^2+b_2^2}{2}\vec{n}$$

Bemerkung: zur Berechnung des zeitlichen Mittelwertes hätten wir an dieser Stelle auch unsere Mittelungsformel verwenden können:

$$\langle\vec{E}^2\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{\mathbb{E}}\cdot\vec{\mathbb{E}}^*\right) = \frac{b_1^2+b_2^2}{2}$$

3.30 Dopplereffekt

Wellen(zahl)vierervektor: $k^\mu = \left(\omega/c, \vec{k}\right)$

Phase $k \cdot x = k_\mu x^\mu = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$ ist ein **Skalar** unter Lorentztransformationen

$$\rightarrow \quad \vec{\mathbb{A}} = \vec{\mathbb{A}}_0 e^{-ik\cdot x}, \qquad k^2 = k_\mu k^\mu = 0$$

$\rightarrow k^\mu$ ist ein **lichtartiger** Vierervektor (sieht man auch aus $\Box\vec{\mathbb{A}} = 0$)

Bemerkung: de Broglie-Beziehung für γ: $p^\mu = \hbar k^\mu \rightarrow p^2 = 0 \rightarrow \gamma$ **masselos**

Dopplereffekt[9]: Beobachter ruht im System S; Stern bewegt sich relativ zum System S mit Geschwindigkeit V in x-Richtung (Stern ruht im System S')

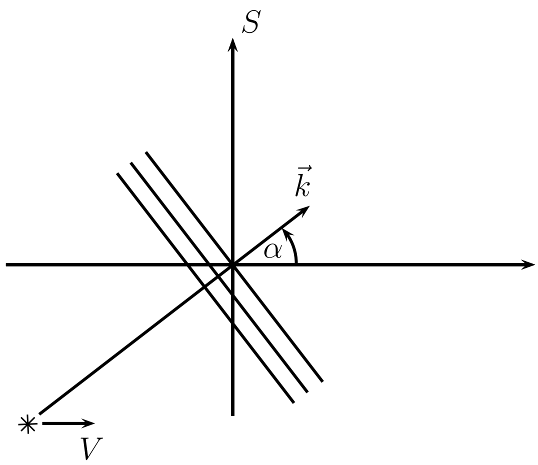


Abbildung 3.48: Ein Stern bewegt sich relativ zu einem Beobachter. $\vec{k}$ ist der Wellenzahlvektor des vom Stern ausgesandten Lichts im System des Beobachters

Lorentztransformation $k' = Lk$:

$$k^{0\prime} = \frac{k^0 - \frac{V}{c}k^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad k^0 = \frac{\omega}{c}, \quad k^1 = \frac{\omega}{c}\cos\alpha, \quad k^{0\prime} = \frac{\omega'}{c}$$

$\omega' \ldots$ Kreisfrequenz im Ruhsystem des Sterns

$\omega \ldots$ Kreisfrequenz im Ruhsystem des Beobachters

[9]Christian Doppler (1803-1853)

$$\begin{aligned}\frac{\omega'}{c} &= \frac{\omega}{c} \cdot \frac{1 - \frac{V}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ \Rightarrow \omega &= \omega' \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c}\cos\alpha} = \omega' \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{V}{c}\right)\left(1 + \frac{V}{c}\right)}{\left(1 - \frac{V}{c}\cos\alpha\right)^2}}\end{aligned}$$

verschiedene Grenzfälle:

- $\alpha = 0 \rightarrow$ der Stern bewegt sich genau auf den Beobachter zu:

  $$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}} \underset{V \ll c}{\longrightarrow} \omega' \left(1 + \frac{V}{c}\right)$$

  $\rightarrow$ Frequenz wird größer (**Blauverschiebung**)

- $\alpha = \pi \rightarrow$ der Stern bewegt sich genau vom Beobachter weg:

  $$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}} \underset{V \ll c}{\longrightarrow} \omega' \left(1 - \frac{V}{c}\right)$$

  $\rightarrow$ Frequenz wird kleiner (**Rotverschiebung**)

- $\alpha = \pi/2 \rightarrow$ der Stern bewegt sich momentan transversal zum Beobachter:

  $$\omega = \omega' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \underset{V \ll c}{\longrightarrow} \omega' \left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right)$$

3.31 Teilweise polarisiertes Licht

jede monochromatische Welle ist definitionsgemäß polarisiert (unendlich ausgedehnter Wellenzug = Idealisierung!)

realistischer Fall: Welle nur **annähernd** monochromatisch, d.h. sie enthält Frequenzen aus einem kleinen Frequenzintervall $\Delta\omega$

$\rightarrow$ betrachten eine solche Welle mit einer **mittleren** Frequenz $\omega \rightarrow$ elektrisches Feld lässt sich in jedem Raumpunkt in der folgenden Form schreiben:

$$\vec{\mathbb{E}} = \vec{\mathbb{E}}_0(t) e^{-i\omega t} \qquad \text{(für festes } \vec{x}\text{)}$$

komplexe Amplitude $\vec{\mathbb{E}}_0(t)$ ist eine **langsam** veränderliche Funktion der Zeit (verglichen mit ω)

Beispiel: (grünes) Licht

$$\lambda \sim 500\,\mathrm{nm} \quad \Rightarrow \nu = c/\lambda = \frac{3}{5} \times 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$$

betrachte zeitliche Mittelwerte von Größen, die bilinear in den Feldern sind:

$$\mathbb{E}_i\mathbb{E}_k, \quad \mathbb{E}_i^*\mathbb{E}_k^*, \quad \mathbb{E}_i\mathbb{E}_k^*$$

der zeitliche Mittelwert

$$\langle \mathbb{E}_i\mathbb{E}_k\rangle = \langle \mathbb{E}_{0i}\mathbb{E}_{0k}e^{-2i\omega t}\rangle$$

verschwindet, da $\exp(-2i\omega t)$ sehr rasch im Verhältnis zur Änderung von $\vec{\mathbb{E}}_0(t)$ oszilliert

einzige Größen, die bei der Mittelung übrigbleiben: $\mathbb{E}_i\mathbb{E}_k^*$ ($i, k = y, z$, falls Ausbreitung der Welle in x-Richtung)

die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \langle \mathbb{E}_y\mathbb{E}_y^*\rangle & \langle \mathbb{E}_y\mathbb{E}_z^*\rangle \\ \langle \mathbb{E}_z\mathbb{E}_y^*\rangle & \langle \mathbb{E}_z\mathbb{E}_z^*\rangle \end{pmatrix}$$

ist hermitesch ($J^\dagger = J$); die Spur $\mathrm{Tr}\, J = \langle |\mathbb{E}_y|^2 + |\mathbb{E}_z|^2\rangle$ ist proportional zum Enenergiestrom (Intensität der Welle) und hat daher **nichts** mit den Polarisationseigenschaften der Welle zu tun $\to$ man definiert den **Polarisationstensor**

$$\rho_{ik} := J_{ik}/\mathrm{Tr}\, J, \quad \rho_{11},\, \rho_{22} \text{ reell}, \;\; \rho_{11}+\rho_{22} = 1, \;\; \rho_{21} = \rho_{12}^* \quad \Rightarrow \quad 3 \text{ reelle Parameter}$$

vollständig polarisiertes Licht: $\vec{\mathbb{E}}_0 = \mathrm{const.}$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{|\mathbb{E}_y|^2 + |\mathbb{E}_z|^2}\begin{pmatrix} |\mathbb{E}_y|^2 & \mathbb{E}_y\mathbb{E}_z^* \\ \mathbb{E}_z\mathbb{E}_y^* & |\mathbb{E}_z|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbb{E}_y|^2 + |\mathbb{E}_z|^2}\begin{pmatrix} \mathbb{E}_y \\ \mathbb{E}_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{E}_y^* & \mathbb{E}_z^* \end{pmatrix} \Rightarrow \det\rho = 0$$

Umkehrung: $\det\rho = 0 \Rightarrow$ ein Eigenwert verschwindet, der andere ist (wegen $\mathrm{Tr}\,\rho = 1$) gleich 1 $\to$ Spektralsatz für normale Operatoren:

$$\rho = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{C},\; |a|^2 + |b|^2 = 1$$

d.h. vollständige Polarisation $\Leftrightarrow \det\rho = 0$

anderer Grenzfall: vollständig unpolarisiertes Licht $\to$ alle Richtungen in der yz-Ebene sind äquivalent $\Rightarrow$ $\rho_{ik} = \delta_{ik}/2$, $\det\rho = 1/4$

Definition des **Polarisationsgrades** P durch $\det\rho = (1 - P^2)/4$

- $P = 0$ vollständig unpolarisiertes Licht
- $P = 1$ vollständig polarisiertes Licht

3.32 Feld einer beschleunigten Ladung

Ladung q bewege sich geradlinig mit Geschwindigkeit $v \ll c \longrightarrow$ elektrisches Feld der Ladung unterscheidet sich dann nicht wesentlich von einem mit Geschwindigkeit v bewegten Coulombfeld; während eines sehr kleinen Zeitintervalls $0 \leq t \leq \tau$ werde die Ladung bis zum Stillstand abgebremst; wir betrachten die Situation zu einem späteren Zeitpunkt $t \gg \tau$; für Abstand $r > ct$ haben wir einfach das Feld einer Ladung, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt; für $c(t-\tau) < r < ct$ sehen wir die Auswirkung der Abbremsung und für $0 \leq r \leq c(t-\tau)$ sehen wir das Coulombfeld der zur Ruhe gekommenen Ladung (dabei vernachlässigen wir die kleine räumliche Verschiebung, die während $0 \leq t \leq \tau$ noch auftritt)

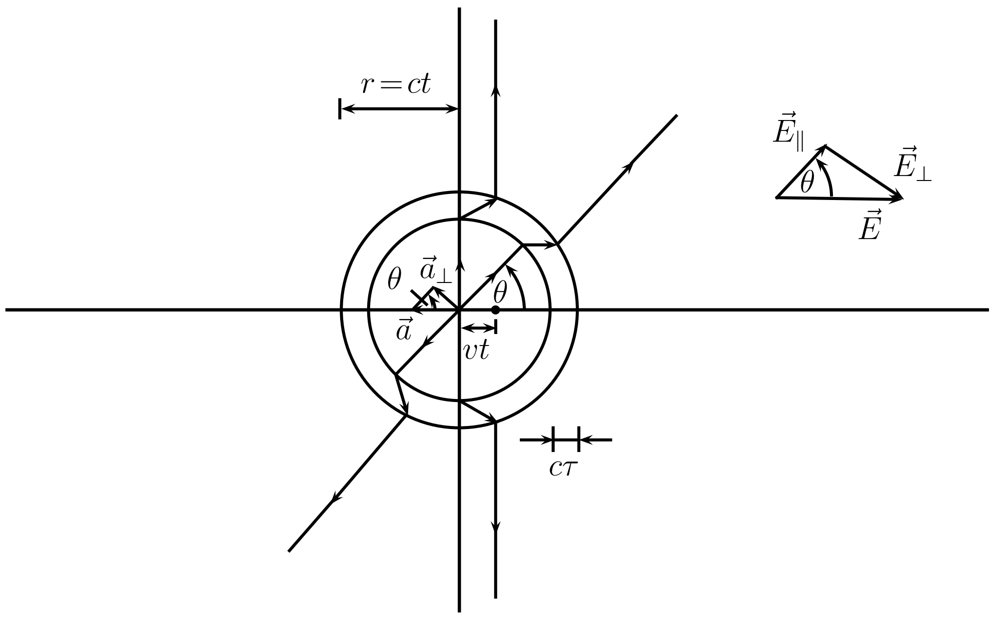


Abbildung 3.49: Feldlinienbild einer plötzlich abgebremsten Ladung

die **Schockfront**, die sich als Knick in den elektrischen Feldlinien mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, entspricht genau dem durch die Abbremsung der Ladung erzeugten **Strahlungsfeld**

Computeranimationen:

http://www.tapir.caltech.edu/~teviet/Waves/empulse.html

http://www.ligo.caltech.edu/~tdcreigh/Radiation/

phet.colorado.edu/sims/radiating-charge/radiating-charge_en.html

zusätzlich zu Coulombanteil $\vec{E}_\parallel$ **in** Beobachtungsrichtung gibt es jetzt den **Strahlungsanteil** des Feldes **normal** zur Beobachtungsrichtung; seine Größe kann durch eine einfache Überlegung bestimmt werden:

$$\frac{|\vec{E}_\perp|}{|\vec{E}_\parallel|} = \left|\frac{vt\sin\theta}{c\tau}\right| = \left|\frac{v\overbrace{ct}^{r}\sin\theta}{c^2\tau}\right| = \left|\frac{ar\sin\theta}{c^2}\right|$$

$$\Rightarrow |\vec{E}_\perp| = \left|\frac{ar\sin\theta}{c^2}\frac{q}{r^2}\right| = \left|\frac{qa\sin\theta}{c^2 r}\right|$$

$$\vec{E}_\perp(t,\vec{x}) = -\frac{q\vec{a}_\perp(t-r/c)}{c^2 r}$$

- Strahlungsanteil des Feldes $\sim 1/r$ (im Gegensatz zum $1/r^2$-Abfall des Coulombfeldes)
- Strahlungsanteil $\sim$ Beschleunigung $a = v/\tau$ der Ladung (zum **retardierten** Zeitpunkt $t - r/c$)

allgemeine Schlussfolgerung:

$$\boxed{\text{beschleunigte Ladungen strahlen}}$$

$$\boxed{\vec{E}(t, r\vec{n}) = -\frac{q\vec{a}_\perp(t-r/c)}{c^2 r} + \mathcal{O}(1/r^2), \quad \vec{B} = \vec{n}\times\vec{E}}$$

$\vec{n}$ ist ein Einheitsvektor, der von der Ladung zum Beobachtungspunkt zeigt

Formel gilt in dieser Form nur, falls Geschwindigkeit der Ladung $v \ll c$

3.33 Retardierte und avancierte Potentiale

wollen allgemeine Lösung der inhomogenen Maxwellschen Gleichungen finden:

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\nu\mu} &= \frac{4\pi}{c} j^\mu, \qquad F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \\ \Rightarrow &\quad \partial_\nu(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = \frac{4\pi}{c} j^\mu \\ \Rightarrow &\quad \Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = \frac{4\pi}{c} j^\mu \end{aligned}$$

wieder kann die Eichfreiheit $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ benutzt werden um durch Auferlegen einer **Eichbedingung** die Gleichungen zu vereinfachen $\to$ wir wählen die Lorenz-Eichung[10] $\partial_\nu A^\nu = 0$

Einsetzen der Eichbedingung in die obigen Feldgleichungen ergibt:

$$\boxed{\Box A_\mu = \frac{4\pi}{c} j_\mu \qquad \partial^\mu A_\mu = 0}$$

die allgemeine Lösung dieses Systems linearer, inhomogener, partieller Differentialgleichungen setzt sich zusammen aus der **allgemeinen** Lösung der homogenen Gleichung plus einer **speziellen** Lösung der inhomogenen Gleichung

um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, verwenden wir die Methode der **Greenfunktion**[11] , d.h. wir suchen eine Funktion

$G(x, y)$, sodass

$$\Box_x G(x, y) = 4\pi \delta^{(4)}(x - y)$$

$\to$ man erhält dann eine spezielle Lösung von $\Box A^\mu = 4\pi j^\mu / c$ durch

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int d^4y \, G(x, y) \, j^\mu(y)$$

wir kennen bereits die Formel

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi \, \delta^{(3)}(\vec{x})$$

mit $r := |\vec{x}|$ erhält man daraus für eine bei $r = 0$ endliche Funktion $f(r)$:

$$\Delta \frac{f(r)}{r} = \Delta \frac{f(0)}{r} + \Delta \frac{f(r) - f(0)}{r} = -4\pi f(0) \, \delta^{(3)}(\vec{x}) + \frac{f''(r)}{r}$$

da $\big(f(r) - f(0)\big)/r$ keine Singularität am Ursprung besitzt

Bemerkung: sei $g(r) = f(r) - f(0)$:

$$\Delta \frac{g(r)}{r} = \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}}_{\text{Radialteil von } \Delta} \frac{g(r)}{r} = \frac{g''(r)}{r}$$

[10] Ludvig Valentin Lorenz (1829-1891)
[11] George Green (1793-1841)

mit $f(r) = \delta(x^0 \pm r)$:

$$\Delta \frac{\delta(x^0 \pm r)}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x})\delta(x^0) + \frac{1}{r}\underbrace{\delta''(x^0 \pm r)}_{(\partial_0)^2\delta(x^0 \pm r)}$$

$$\Rightarrow \Box \frac{\delta(x^0 \pm r)}{r} = 4\pi\delta^{(4)}(x)$$

→ Greenfunktion(en) des d'Alembert-Operators:

$$G(x,y) = \frac{\delta(x^0 - y^0 \pm |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

mit $-$ heißt G **retardiert** (kausal), mit $+$ **avanciert** (akausal)

$$\boxed{\begin{aligned} A^\mu(x) &= \underbrace{A^\mu_{\substack{\text{aus}\\ \text{ein}}}(x)}_{\text{Lsg. der hom. Gl.}} + \frac{1}{c}\int d^3y\, dy^0 \frac{\delta(x^0 - y^0 \pm |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} j^\mu(y) \\ &= A^\mu_{\substack{\text{aus}\\ \text{ein}}}(x) + \underbrace{\frac{1}{c}\int d^3y\, \frac{j^\mu(x^0 \pm |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}}_{\substack{\text{avanciertes Potential } (+)\\ \text{retardiertes Potential } (-)}} \end{aligned}}$$

Bedeutung von $A^\mu_{\substack{\text{aus}\\ \text{ein}}}(x)$:

Diskussion nur für $\phi = A^0$ (für $\vec{A}$ völlig analog)

$$\phi(t, \vec{x}) = \phi_{\substack{\text{aus}\\ \text{ein}}}(t, \vec{x}) + \int d^3y\, \frac{\rho(t \pm |\vec{x} - \vec{y}|/c, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Bedeutung von ϕ_{ein}:

$$\phi(t, \vec{x}) = \phi_{\text{ein}}(t, \vec{x}) + \int d^3y\, \frac{\rho(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Bemerkung: wie Formel für Potential im statischen Fall, jedoch Ladungsdichte zum **retardierten Zeitpunkt** $t - |\vec{x} - \vec{y}\,|/c$ genommen

angenommen, die Ladungsverteilung (Quelle) wird erst nach der Zeit T eingeschaltet → $\phi(t, \vec{x}) = \phi_{\text{ein}}(t, \vec{x})$ für $t < T$

Bedeutung von ϕ_{aus}:

$$\phi(t, \vec{x}) = \phi_{\text{aus}}(t, \vec{x}) + \int d^3y\, \frac{\rho(t + |\vec{x} - \vec{y}|/c, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

$\rightarrow$ ist die Quelle nur **vor** dem Zeitpunkt T eingeschaltet, so ist $\phi(t,\vec{x}) = \phi_{\text{aus}}(t,\vec{x})$ für $t > T$

$\rightarrow$ retardierte Greenfunktion nötig um ϕ für die **Zukunft** zu berechnen, avancierte Greenfunktion für die **Vergangenheit**, mathematisch **gleichwertig**, aber in physikalischen Anwendungen wesentlich häufiger die erste Situation

Strahlungsfeld $\phi_{\text{rad}} := \phi_{\text{aus}} - \phi_{\text{ein}}$ ist jene Lösung der **freien** Wellengleichung, welche angibt, wie sich das Feld durch eine nur im Zeitraum $T_1 < t < T_2$ eingeschaltete Quelle **ändert** ($\rightarrow$ Streuprobleme)

3.34 Prinzip von Huygens

δ-artige Quelle: $\rho(t,\vec{x}) = \delta(t)\delta^{(3)}(\vec{x})$ (kurze, punktförmige Störung) $\rightarrow$

$$\phi_{\text{ret}}(t,\vec{x}) = \int d^3y\, \frac{\delta(t-|\vec{x}-\vec{y}|/c)\,\delta^{(3)}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{\delta(t-|\vec{x}|/c)}{|\vec{x}|}$$

Störung pflanzt sich konzentrisch vom Ursprung aus mit Geschwindigkeit c fort $\rightarrow$ jeder Punkt $\vec{x}$ empfängt zum Zeitpunkt $|\vec{x}|/c$ ein **scharfes Signal**, vorher und nachher **nichts** $\rightarrow$ **Huygenssches**[12] **Prinzip**

das Prinzip von Huygens ist **nicht** trivial: es gilt **nur** bei Wellengleichungen in **ungeraden** Raumdimensionen (der Fall **einer** Raumdimension ist eine Ausnahme)

bei **geraden** Raumdimensionen gibt es **Nachhall** $\rightarrow$ Wellenphänomene in einer Wellenwanne zu zeigen ist oft zweifelhaft!

Diskussion der Wellengleichung mit δ-Quelle in n Raumdimensionen $\rightarrow$ suchen retardierte Greenfunktion $G^{(n)}(t,\vec{x})$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n\right) G^{(n)}(t,\vec{x}) = \delta(t)\delta^{(n)}(\vec{x})$$

Bemerkung: bis zum Ende dieses Abschnitts ist $c = 1$ gesetzt

kennen bereits die Lösung in **3 Raumdimensionen**:

$$G^{(3)}(t,\vec{x}) = \frac{\delta(t-r)}{4\pi r}, \qquad r = |\vec{x}|$$

$G^{(3)} = \infty$ **auf** dem Vorwärtslichtkegel (**keine** Strahlung im Inneren des Lichtkegels!)

[12] Christiaan Huygens (1629-1695)

2 Raumdimensionen:

$$G^{(2)}(t,x,y) = \frac{\theta(t-r)}{2\pi\sqrt{t^2-r^2}}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$G^{(2)} = \infty$ **auf** dem Vorwärtslichtkegel, $G^{(2)} \neq 0$ (endlich) im Inneren des Lichtkegels $\rightarrow$ **Nachhall** (Prinzip von Huygens **nicht** erfüllt!)

Ausnahmefall $n = 1$:

$$G^{(1)}(t,x) = \frac{1}{2}\theta(t-|x|)$$

$\rightarrow$ Prinzip von Huygens nicht erfüllt, aber $G^{(1)}$ überall endlich ($G^{(1)} = 1/2$ im Inneren und auf dem Lichtkegel) $\rightarrow$ Nachhall klingt nicht ab!

allgemein gilt:

- Huygenssches Prinzip gilt in $n = 3, 5, 7, \ldots$ Raumdimensionen
- Nachhall in $n = 2, 4, 6, \ldots$ Raumdimensionen
- Ausnahmefall $n = 1$

Bemerkung: $G^{(3)}$ bekannt $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} G^{(2)}(t,x,y) &= \int dz\, G^{(3)}(t,x,y,z) \\ G^{(1)}(t,x) &= \int dy\, G^{(2)}(t,x,y) \end{aligned}$$

3.35 Strahlungsfeld in Dipolnäherung

betrachten Ladungs- und Stromverteilung, die in einem Bereich der Größe ℓ um den Ursprung konzentriert ist

interessieren uns nur für das Feld in der **Fernzone** $r := |\vec{x}| \gg \ell$ (**Wellenzone**) $\longrightarrow$ nur $1/r$-Terme relevant

$$|\vec{x} - \vec{y}\,| = r|\vec{n} - \vec{y}/r| \simeq r - \vec{n}\cdot\vec{y} + \ldots$$

$$\frac{|\vec{y}\,|}{r} \leq \frac{\ell}{r} \ll 1$$

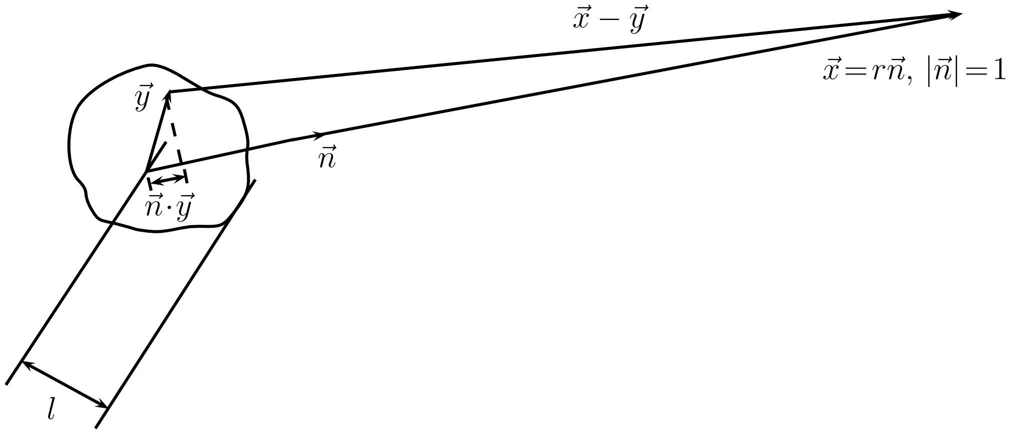


Abbildung 3.50: Zur Berechnung des Strahlungsfeldes in der Fernzone

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}\,|} \simeq \frac{1}{r-\vec{n}\cdot\vec{y}} = \frac{1}{r(1-\vec{n}\cdot\vec{y}/r)} \simeq \frac{1}{r}(1+\vec{n}\cdot\vec{y}/r+\ldots)$$

für die retardierten Potentiale erhält man in dieser Näherung:

$$\begin{aligned}
\phi(t,\vec{x}) &= \frac{1}{r}\int d^3y\,\rho(t-r/c+\vec{n}\cdot\vec{y}/c,\,\vec{y}\,)+\ldots \\
\vec{A}(t,\vec{x}) &= \frac{1}{cr}\int d^3y\,\vec{j}(t-r/c+\vec{n}\cdot\vec{y}/c,\,\vec{y}\,)+\ldots
\end{aligned}$$

wann ist $\vec{n}\cdot\vec{y}/c$ klein?

die Ladungs- und Stromverteilung sei periodisch mit Periode $\tau \longrightarrow$

$$|\vec{n}\cdot\vec{y}/c| \leq \ell/c \ll \tau$$

ist die Bedingung dafür, dass man die Retardierung **in der Quelle** vernachlässigen kann (**Dipolnäherung**), d.h. $\ell \ll c\tau = \lambda$

Zusammenhang mit der Geschwindigkeit der Ladungen:

$$v \simeq \ell/\tau \ll c$$

$\longrightarrow$ Dipolnäherung entspricht nichtrelativistischer Näherung

$$\phi(t,\vec{x}) = \frac{Q}{r}+\frac{1}{r}\int d^3y\,\dot{\rho}(t-r/c,\,\vec{y}\,)\,\vec{n}\cdot\vec{y}/c+\ldots$$

mit Hilfe des **Dipolmoments**

$$\vec{d}(t) := \int d^3x\,\rho(t,\vec{x})\,\vec{x}$$

kann man den zweiten Term umformen:

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{d}}(t-r/c) &= \int d^3y\,\dot{\rho}(t-r/c,\vec{y})\,\vec{y} \\
&= -\int d^3y\,\vec{y}\;\nabla_i j_i(t-r/c,\,\vec{y}\,) \\
&= \int d^3y\,\vec{j}(t-r/c,\,\vec{y}\,)
\end{aligned}
$$

somit erhält man für die retardierten Potentiale:

$$
\begin{aligned}
\phi(t,\vec{x}) &= \frac{Q}{r} + \frac{\vec{n}\cdot\dot{\vec{d}}(t-r/c)}{cr} + \dots \\
\vec{A}(t,\vec{x}) &= \frac{\dot{\vec{d}}(t-r/c)}{cr} + \dots
\end{aligned}
$$

daher Dipolnäherung (Dipolstrahlung)

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \vec{B}(t,\vec{x}) &= \operatorname{rot}\vec{A}(t,\vec{x}) \\
&= \frac{\ddot{\vec{d}}(t-r/c)\times\vec{n}}{c^2 r} + \mathcal{O}(1/r^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \vec{E}(t,\vec{x}) &= -\operatorname{grad}\phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(t,\vec{x})}{\partial t} \\
&= -\frac{\ddot{\vec{d}}(t-r/c) - \vec{n}\big(\vec{n}\cdot\ddot{\vec{d}}(t-r/c)\big)}{c^2 r} + \mathcal{O}(1/r^2) \\
&= -\frac{\ddot{\vec{d}}_\perp(t-r/c)}{c^2 r} + \mathcal{O}(1/r^2)
\end{aligned}
$$

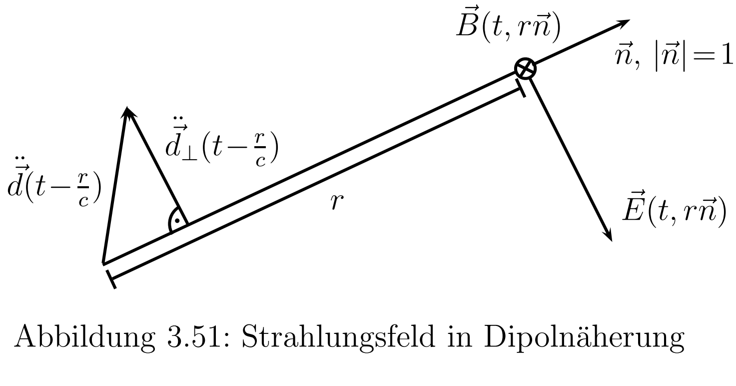


Abbildung 3.51: Strahlungsfeld in Dipolnäherung

Anwendung auf eine Punktladung, die sich auf der Bahnkurve $t \to \vec{z}(t)$ bewegt: $\vec{d}(t) = q\,\vec{z}(t) \Rightarrow \ddot{\vec{d}} = q\,\ddot{\vec{z}} \equiv q\,\vec{a}$

man erhält die bereits bekannten Formeln

$$\vec{E}(t, r\vec{n}) = -\frac{q\vec{a}_\perp(t - r/c)}{c^2 r} + \mathcal{O}(1/r^2), \quad \vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$$

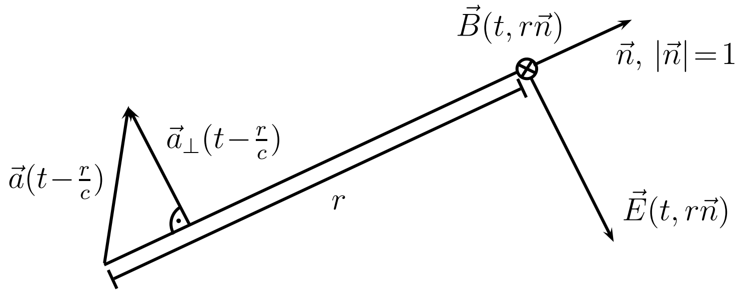


Abbildung 3.52: Strahlungsfeld einer nichtrelativistischen beschleunigten Ladung

Strahlungsleistung:

Poyntingvektor

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi}\vec{B}^2\,\vec{n}$$

Abstrahlung in das Raumwinkelelement $d\Omega$ (Strahlungscharakteristik der Dipolstrahlung):

$$\begin{aligned} dP &= \frac{c}{4\pi}\vec{B}^2 r^2 d\Omega \\ &= \frac{c}{4\pi}\frac{r^2}{(c^2 r)^2}(\ddot{\vec{d}} \times \vec{n})^2 d\Omega \\ &= \frac{\ddot{\vec{d}}^2 \sin^2\theta}{4\pi c^3} d\Omega \end{aligned}$$

θ ist der Winkel zwischen $\ddot{\vec{d}}$ und $\vec{n}$

Gesamtintensität:

$$\begin{aligned} P &= \int \underbrace{d\Omega}_{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi} \frac{\ddot{\vec{d}}^2 \sin^2\theta}{4\pi c^3} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, \frac{\ddot{\vec{d}}^2 \sin^2\theta}{4\pi c^3} \\ &= 2\pi \int_{-1}^{+1} dx\,(1 - x^2)\,\frac{\ddot{\vec{d}}^2}{4\pi c^3} = \frac{2\,\ddot{\vec{d}}^2}{3\,c^3} \end{aligned}$$

3.36 Liénard-Wiechert-Potentiale

wir wollen das 4-Potential jenes elektromagnetischen Feldes finden, das von einem geladenen Punktteilchen erzeugt wird, welches sich längs der Bahnkurve $t \to \vec{z}(t)$ bewegt

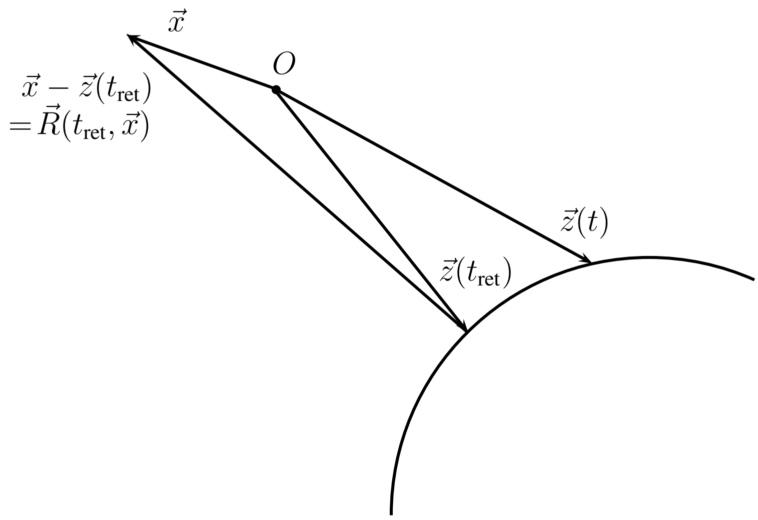


Abbildung 3.53: Das geladene Teilchen bewegt sich auf der Trajektorie $t \to \vec{z}(t)$. Das zum Zeitpunkt t am Ort $\vec{x}$ gemessene elektromagnetische Feld wird durch den Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsvektor der Ladung zum retardierten Zeitpunkt t_{ret} bestimmt

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \frac{1}{c}\int d^4y \frac{\delta(x^0 - y^0 - |\vec{x}-\vec{y}|)}{|\vec{x}-\vec{y}|} j^\mu(y) \\ &= \frac{1}{c}\int dt' d^3y\, \frac{\delta(t - t' - |\vec{x}-\vec{y}|/c)}{|\vec{x}-\vec{y}|} j^\mu(t', \vec{y}) \end{aligned}$$

in unserem Fall ist die 4-Stromdichte:

$$j^\mu(t', \vec{y}) = q\delta^{(3)}\big(\vec{y} - \vec{z}(t')\big)\dot{z}^\mu(t')$$

$\to$ eingesetzt in die Formel für das retardierte 4-Potential erhält man:

$$A^\mu(x) = \frac{q}{c}\int dt'\, \frac{\delta(t - t' - |\vec{x} - \vec{z}(t')|/c)}{|\vec{x} - \vec{z}(t')|}\, \dot{z}^\mu(t')$$

zu diesem Integral gibt es nur einen Beitrag für $t' = t_{\text{ret}}$, wobei t_{ret} durch die Gleichung

$$c(t - t_{\text{ret}}) = |\vec{x} - \vec{z}(t_{\text{ret}})|$$

bestimmt wird

mit $\vec{R}(t,\vec{x}) := \vec{x} - \vec{z}(t)$, $R = |\vec{R}|$ schreibt sich die Gleichung so:

$$R(t_{\text{ret}},\vec{x}) = c(t - t_{\text{ret}})$$

ihre Lösung ist **eindeutig** bestimmt, da $|\dot{\vec{z}}| < c \;\forall\, t$:

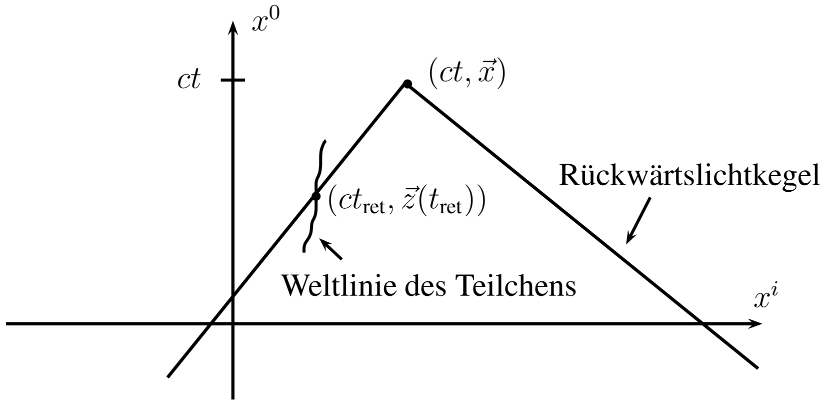


Abbildung 3.54: Die Weltlinie des Teilchens schneidet den Rückwärtslichtkegel nur in einem einzigen Punkt

die Auswertung der δ-Funktion in dem Ausdruck für das 4-Potential ergibt:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \frac{q}{c}\int dt'\,\frac{\delta(t'-t_{\text{ret}})}{R(t',\vec{x})(1+\dot{R}(t_{\text{ret}},\vec{x})/c)}\,\dot{z}^\mu(t') \\ &= \frac{q}{c}\,\frac{\dot{z}^\mu(t_{\text{ret}})}{R(t_{\text{ret}},\vec{x})(1+\dot{R}(t_{\text{ret}},\vec{x})/c)} \end{aligned}$$

man kann das noch etwas umformen:

$$\begin{aligned} R(t,\vec{x})^2 &= \vec{R}(t,\vec{x})^2, \quad \vec{R}(t,\vec{x}) = \vec{x} - \vec{z}(t) \\ &\Rightarrow \; 2R\dot{R} = 2\vec{R}\cdot\dot{\vec{R}} = -2\vec{R}\cdot\dot{\vec{z}}(t) \quad \Rightarrow \quad R\dot{R} = -\vec{R}\cdot\vec{v}(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{A^\mu(x) = \frac{q}{c}\,\frac{\dot{z}^\mu(t_{\text{ret}})}{R(t_{\text{ret}},\vec{x}) - \vec{R}(t_{\text{ret}},\vec{x})\cdot\vec{v}(t_{\text{ret}})/c}}$$

→ **Liénard-Wiechert-Potentiale**[13]:

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(t,\vec{x}) &= \frac{q}{R(t_{\mathrm{ret}},\vec{x}) - \vec{R}(t_{\mathrm{ret}},\vec{x})\cdot\vec{v}(t_{\mathrm{ret}})/c}\\ \vec{A}(t,\vec{x}) &= \frac{q}{c}\,\frac{\vec{v}(t_{\mathrm{ret}})}{R(t_{\mathrm{ret}},\vec{x}) - \vec{R}(t_{\mathrm{ret}},\vec{x})\cdot\vec{v}(t_{\mathrm{ret}})/c}\end{aligned}}$$

aus den Liénard-Wiechert-Potentialen kann man dann mit Hilfe von

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

das elektromagnetische Feld einer beliebig bewegten Punktladung erhalten; da wir hier die Ableitungen nach den Variablen t und $\vec{x}$ haben, die Liénard-Wiechert-Potentiale aber durch t_{ret} und $\vec{x}$ ausgedrückt sind, benötigen wir $\partial t_{\mathrm{ret}}/\partial t$ und $\partial t_{\mathrm{ret}}/\partial x_i$

→ wir führen die Abkürzungen $\vec{R} := \vec{R}(t_{\mathrm{ret}},\vec{x})$, $R := |\vec{R}(t_{\mathrm{ret}},\vec{x})|$, $\vec{n} := \vec{R}/R$, $\vec{\beta} := \vec{v}(t_{\mathrm{ret}})/c$, $\kappa := 1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta}$ ein und erhalten:

$$\frac{\partial t_{\mathrm{ret}}}{\partial t} = \frac{1}{\kappa}, \qquad \frac{\partial t_{\mathrm{ret}}}{\partial x_i} = -\frac{n_i}{c\kappa}$$

→ damit rechnet man aus:

$$\frac{\partial R_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} + \frac{n_i\beta_j}{\kappa}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x_i} = \frac{n_i}{\kappa}, \qquad \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} = -\frac{n_i\dot{\beta}_j}{c\kappa}$$

→ mit Hilfe dieser Formeln erhält man für das **elektrische Feld**:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(t,\vec{x}) &= q\left[\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{\kappa^3R^2} + \frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}}) - \kappa\dot{\vec{\beta}}}{c\kappa^3R}\right]\\ &= q\left[\frac{(\vec{n}-\vec{\beta})(1-\beta^2)}{\kappa^3R^2} + \frac{\vec{n}\times\left((\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right)}{c\kappa^3R}\right]\end{aligned}}$$

→ Ergebnis besteht aus einem beschleunigungs**un**abhängigen Term, der mit $1/R^2$ abfällt und einem beschleunigungs**ab**hängigen Term, der nur mit $1/R$ abfällt

[13] Alfred Liénard (1869-1959), Emil Wiechert (1861-1928)

für das **Magnetfeld** erhält man den Ausdruck

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B}(t,\vec{x}) &= -q\left[\frac{\vec{n}\times\vec{\beta}\,(1-\beta^2)}{\kappa^3R^2}+\frac{\vec{n}\times\vec{\beta}\,(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})+\kappa\vec{n}\times\dot{\vec{\beta}}}{c\kappa^3R}\right]\\ &= \vec{n}\times\vec{E}(t,\vec{x})\end{aligned}}$$

→ bemerkenswert: $\vec{B}\perp\vec{E}$ (gilt nicht nur für den Strahlungsanteil)

3.37 Strahlung einer schnell bewegten Ladung

in großen Entfernungen ist nur der $1/R$-Term wesentlich:

$$\vec{E}_{\mathrm{Str}}(t,\vec{x})=\frac{q}{c\kappa^3R}\,\vec{n}\times\left[\left(\vec{n}-\vec{\beta}\right)\times\dot{\vec{\beta}}\right],\qquad \vec{B}_{\mathrm{Str}}(t,\vec{x})=\vec{n}\times\vec{E}_{\mathrm{Str}}(t,\vec{x})$$

für **ultrarelativistische** Teilchen ($v\simeq c$) wird die Winkelverteilung der Strahlung durch das Auftreten hoher Potenzen von $\kappa=1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}$ im **Nenner** bestimmt

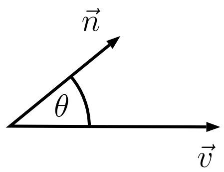


Abbildung 3.55: Ein beschleunigtes ultrarelativistisches Teilchen strahlt hauptsächlich in einen kleinen Winkelbereich um den Geschwindigkeitsvektor

$\theta :=\sphericalangle(\vec{n},\vec{\beta})\Rightarrow\kappa=1-\beta\cos\theta$ wird klein für **kleine** Winkel θ

$$\Rightarrow\quad \kappa\simeq 1-\beta(1-\theta^2/2)\simeq 1-\beta+\theta^2/2\simeq\frac{1}{2}(1-\beta^2+\theta^2)$$

verwendet: $1-\beta^2=(1-\beta)(1+\beta)\simeq 2(1-\beta)$

$$\Rightarrow\quad \kappa \text{ klein für } |\theta|\lesssim\sqrt{1-\beta^2}$$

→ das ultrarelativistische Teilchen strahlt **in** seine Bewegungsrichtung und zwar in das Winkelintervall

$$|\theta|\lesssim\sqrt{1-\beta^2}=1/\gamma$$

um die Geschwindigkeitsrichtung („**Scheinwerfereffekt**“)

die im Laufe der Zeit dt in das Raumwinkelelement $d\Omega$ abgestrahlte Energiemenge ist gleich

$$\underbrace{\left(\frac{c}{4\pi}\,\vec{E}^2 R^2\, d\Omega\right)}_{dP} dt$$

dt ist das Zeitintervall im Moment der **Beobachtung**, sodass dP die Leistung darstellt, die ein **Beobachter** wahrnimmt $\rightarrow$ infolge des Verzögerungseffekts, der bei der Ausbreitung von Wellen vom strahlenden Teilchen zum Beobachtungspunkt auftritt, fällt das Zeitintervall dt **nicht** mit dem Intervall dt_{ret} zusammen, in dessen Verlauf die Energie $dP\,dt$ von dem sich bewegenden Teilchen abgestrahlt wird

wir wissen bereits: $dt = \kappa dt_{\text{ret}} = (1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta})dt_{\text{ret}}$

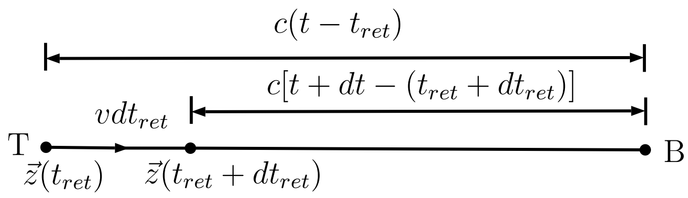


Abbildung 3.56: Zur Illustration des Zustandekommens des Unterschiedes zwischen dt_{ret} (Zeitintervall für das Teilchen T) und dt (Zeitintervall für den Beobachter B)

$\rightarrow$ betrachten zur Illustration den Spezialfall eines Teilchens, das sich geradlinig auf den Beobachter zubewegt (siehe Abb. 3.56)

$$\Rightarrow \qquad c(t + dt - t_{\text{ret}} - dt_{\text{ret}}) = c(t - t_{\text{ret}}) - vdt_{\text{ret}}$$
$$\Rightarrow \qquad dt = (1 - v/c)dt_{\text{ret}}$$

$\rightarrow$ die vom **Teilchen ausgestrahlte** Leistung ist daher

$$d\hat{P} = dP\,\underbrace{\frac{dt}{dt_{\text{ret}}}}_{\kappa} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}^2\kappa\, R^2\, d\Omega$$

$\rightarrow$ **differentielle Strahlungsleistung**:

$$\frac{d\hat{P}}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c}\frac{\left|\vec{n}\times\left[(\vec{n}-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right]\right|^2}{\left(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}\right)^5}$$

(in den Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Energie pro Zeit **des Teilchens**)

Bemerkung: im nichtrelativistischen Limes besteht **kein** Unterschied zwischen dP und $d\hat{P}$, da $\beta \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow 1$

Spezialfall: $\dot{\vec{v}} \| \vec{v}$ (Beschleunigung in Richtung der Geschwindigkeit)

$$\left| \vec{n} \times \left[(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}} \right] \right|^2 = \dot{\vec{\beta}}^2 \sin^2\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{P}}{d\Omega} = \frac{q^2 \dot{\vec{v}}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2\theta}{(1 - \beta\cos\theta)^5}$$

wie bereits qualitativ diskutiert: Nenner κ^5 modifiziert Winkelverteilung drastisch für $\beta \to 1 \Rightarrow$ Strahlung ganz in **Vorwärtsrichtung gebündelt**

$$\frac{d\hat{P}}{d\Omega} \underset{\theta \to 0}{\longrightarrow} \frac{8q^2 \dot{\vec{v}}^2 \gamma^8}{\pi c^3} \frac{(\gamma\theta)^2}{[1 + (\gamma\theta)^2]^5}$$

mit $x := (\gamma\theta)^2$: Maximum von $x/(1+x)^5$ bei $x = 1/4 \Rightarrow \gamma|\theta|_{\max} = 1/2 \Rightarrow |\theta|_{\max} = 1/(2\gamma) = \sqrt{1-\beta^2}/2$

starke Bündelung in Vorwärtsrichtung

maximale Intensität $\sim \gamma^8$ (z.B. $v = 0.9c \to \gamma^8 = 767$)

Gesamtleistung durch Integration über Raumwinkel (mühsam)

einfache Invarianzüberlegung: $\hat{P} = dE_{\text{Str}}/dt_{\text{ret}}$: Zähler und Nenner nullte Komponenten von Vierervektoren $\to \hat{P}$ ist ein Lorentzskalar, quadratisch in $\dot{\vec{v}}$

nichtrelativistischer Grenzfall:

$$\hat{P} = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{\vec{v}}^2 = \frac{2q^2}{3m^2c^3} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2$$

Konstruktion der (naheliegenden) allgemeinen Form mit Hilfe des (raumartigen) Vierervektors

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{\gamma}{c} \frac{dp^\mu}{dt}$$

$$\hat{P} = -\frac{2q^2}{3m^2c} \frac{dp^\mu}{ds} \frac{dp_\mu}{ds}, \qquad p^\mu = mc\gamma \left(1, \vec{\beta} \right)$$

zu bererechnen:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = m\gamma \frac{d}{dt} \left(\gamma, \gamma\vec{\beta} \right) \quad \to \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}, \quad \frac{d(\gamma\vec{\beta})}{dt} = \gamma^3 \left(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right) \vec{\beta} + \gamma \dot{\vec{\beta}}$$

$\to$ **allgemeine** relativistische Strahlungsformel:

$$\Rightarrow \quad \hat{P} = \frac{2q^2\gamma^4}{3c} \left[\dot{\vec{\beta}}^2 + \gamma^2 \left(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right] = \frac{2q^2\gamma^6}{3c} \left[\dot{\vec{\beta}}^2 - \left(\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right]$$

Anwendung: geladenes Teilchen bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in einem **kreisförmigen Speicherring** (Kreisbeschleuniger, Synchrotron) mit Radius r

$$\begin{aligned} \vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}} \quad &\Rightarrow \quad \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} = 0 \\ \beta = |\vec{\beta}| = \text{const} \quad &\Rightarrow \quad |\dot{\vec{\beta}}\,| = \frac{\vec{v}^2}{cr} = \frac{c\beta^2}{r} \\ &\Rightarrow \quad \hat{P} = \frac{2q^2 c\beta^4\gamma^4}{3r^2} \end{aligned}$$

Teilchenenergie $\mathcal{E} = mc^2\gamma$ einsetzen $\rightarrow$ **Synchrotronstrahlungsformel**:

$$\hat{P} = \frac{2q^2 c\beta^4}{3r^2}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4$$

Energieverlust des Teilchens pro Umlauf:

$$\Delta E = P \times \frac{2\pi r}{v} = P \times \frac{2\pi r}{\beta c} = \frac{4\pi q^2 \beta^3}{3r}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4$$

$\rightarrow$ Strahlungsverluste wachsen mit vierter Potenz der Teilchenenergie $\rightarrow$ Synchrotronstrahlung beschränkt Verwendung von Kreisbeschleunigern bei hohen Energien

Beispiel: LEP (1989-2000) $r \simeq 4.3\,\text{km}$, zuletzt $\mathcal{E}_{e^+} = \mathcal{E}_{e^-} \simeq 100\,\text{GeV}$ $\rightarrow$ Energieverlust eines Elektrons (Positrons) pro Umlauf $\Delta E \simeq 2\,\text{GeV}$

gewaltige Verluste durch Synchrotronstrahlung: LEP hatte Energiebedarf einer Kleinstadt

Ausweg: $e^{\pm} \rightarrow p$ (LHC)

$$\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^4 = \left(\frac{0.51}{938.27}\right)^4 \simeq 9 \times 10^{-14}$$

3.38 Streuung

Beispiel: Streuung einer ebenen Welle an einem in einem Oszillatorpotential gebundenen Teilchen:

i. einfallende monochromatische ebene Welle

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \text{Re}\left[\mathbb{E}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}\right] \;, \quad \vec{B} = \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E}$$

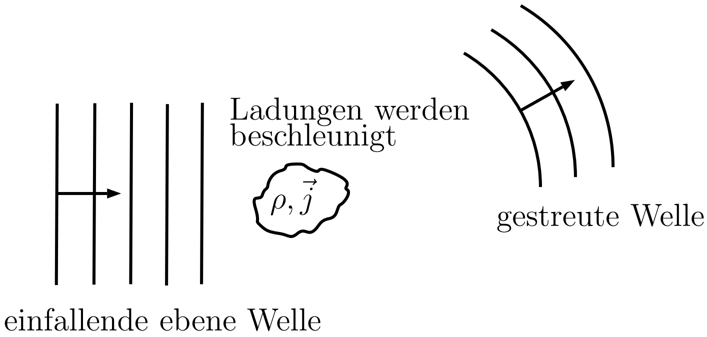


Abbildung 3.57: Schema eines typischen Streuexperiments

ii. Punktladung mit Trajektorie $\vec{z}(t)$ sei in einem Oszillatorpotential (Gleichgewichtslage im Ursprung) gebunden (Modell für im Atom gebundenes Elektron): Ladung q, Frequenz ω_0, Dämpfung Γ

iii. Bewegung nichtrelativistisch ($v \ll c$) $\rightarrow \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$ vernachlässigbar

iv. Wellenlänge der einfallenden Welle groß: $\lambda \gg |\vec{z}|$

Bewegungsgleichung für Punktladung:

$$m \ddot{\vec{z}} + m\Gamma \dot{\vec{z}} + m\omega_0^2 \vec{z} = q\, \vec{\mathbb{E}}_0\, e^{i(\vec{k} \cdot \vec{z} - \omega t)} + \mathcal{O}(v/c)$$

Reibungskraft $-m\Gamma \dot{\vec{z}}$ verursacht durch verschiedene Prozesse, die dem Punktteilchen Energie entziehen (Abstrahlung, Stoßprozesse, ...)

Dipolnäherung: mit $\vec{k} \cdot \vec{z} \ll 1 \rightarrow e^{i\vec{k} \cdot \vec{z}} = 1 + \mathcal{O}(|\vec{z}|/\lambda)$

allgemeine Lösung: $\vec{z}(t) = \vec{z}_s(t) + \vec{z}_h(t)$ (Lösung $\vec{z}_h(t)$ der homogenen Gleichung klingt mit $e^{-\Gamma t/2}$ ab)

Ansatz für **spezielle** Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$\vec{z}_s(t) = \vec{z}_0\, e^{-i\omega t} \quad \rightarrow \quad (-\omega^2 - i\Gamma\omega + \omega_0^2)\, \vec{z}_0 = q\vec{\mathbb{E}}_0/m$$

$\rightarrow$ zeitabhängiges **Dipolmoment**

$$\vec{d}(t) = q\, \vec{z}_0\, e^{-i\omega t} = \frac{q^2 \vec{\mathbb{E}}_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega} e^{-i\omega t}$$

Vor.: einfallende Welle linear polarisiert $\rightarrow \vec{\mathbb{E}}_0 = e^{i\delta} \vec{E}_0$ mit reellem Vektor $\vec{E}_0$

zeitgemittelte Dipolstrahlung:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\omega^4 q^2\, |\vec{z}_0|^2\, \sin^2\theta}{8\pi c^3} = \frac{c}{8\pi}\, |\vec{E}_0|^2 \left(\frac{q^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2\chi}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}$$

(χ ist der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{E}_0$ und der Beobachtungsrichtung)

strikt **elastische** Streuung: keine Frequenzänderung in der gestreuten Welle

differentieller Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel } d\Omega}{\text{einfallende Leistung pro Fläche}} = \frac{\left\langle \dfrac{dP}{d\Omega} \right\rangle}{\langle|\vec{S}|\rangle}$$

mit $\quad \langle|\vec{S}|\rangle = c\langle\eta\rangle = \dfrac{c}{8\pi}|\vec{E}_0|^2$

differentieller Wirkungsquerschnitt für Streuung von linear polarisierter Welle an gebundener Ladung:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2\chi}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}}$$

integrierter Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}$$

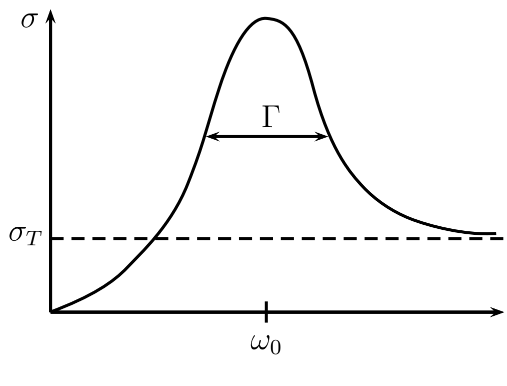


Abbildung 3.58: Streuquerschnitt als Funktion der Kreisfrequenz der einfallenden Welle

Elektronen: $r_0 = \dfrac{e^2}{m_e c^2} = 2.8\,\text{fm}$ (klassischer Elektronradius)

Rayleigh-Streuung[14]: $\omega \ll \omega_0$

[14] John William Strutt, 3. Baron Rayleigh (1842-1919)

relevant für Streuung von Sonnenlicht an Molekülen in der Atmosphäre

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$$

$\to$ blaues Sonnenlicht stärker gestreut als rotes

$$\frac{\sigma_{\text{blau}}}{\sigma_{\text{rot}}} = \frac{\omega_{\text{blau}}^4}{\omega_{\text{rot}}^4} = \frac{\lambda_{\text{rot}}^4}{\lambda_{\text{blau}}^4} \simeq \left(\frac{700\text{ nm}}{400\text{ nm}}\right)^4 \simeq 10$$

$\to$ Erklärung von Himmelsblau und Abendröte

Resonanzstreuung: $\omega \simeq \omega_0$

starke Energieabhängigkeit $\to$ Instrument zur Strukturuntersuchung

$$\sigma(\omega = \omega_0) = \sigma_{\text{Res}} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega_0^2}{\Gamma^2}$$

wo ist $\sigma(\omega) = \sigma_{\text{Res}}/2$? $\to$ wenn $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \simeq \omega_0^2 \Gamma^2$ (für $\Gamma \ll \omega_0$) $\to$ Lösung: $\omega = \omega_0 \pm \Gamma/2 \to \Gamma =$ Gesamtbreite bei halbem Maximum

QM, QFT: Energieunschärfe des (Resonanz-)Zustands $\sim \hbar\Gamma = \hbar/\tau$ ($\tau =$ Lebensdauer des Zustands)

Thomson-Streuung[15]: $\omega \gg \omega_0$, Γ

insbesondere für freie Elektronen ($\omega_0 = 0$)

$$\sigma_{\text{T(homson)}} = \frac{8\pi}{3} r_0^2$$

bisher immer linear polarisiertes Licht betrachtet $\to$ für Praxis noch wichtiger: **Streuung von unpolarisiertem Licht**

unpolarisiertes Licht: statistisches Gemisch aller möglichen Polarisationen

Resultat (ohne Rechnung; $\theta =$ Streuwinkel zwischen ein- und auslaufender Welle):

$$\frac{d\sigma_{\text{T,unpol}}}{d\Omega} = \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \left(1 - \frac{\sin^2\theta}{2}\right)$$

integrierter Querschnitt:

$$\sigma_{\text{T,unpol}} = \int d\Omega \frac{d\sigma_{\text{T,unpol}}}{d\Omega} = 2\pi \left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \frac{1+\cos^2\theta}{2} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2$$

[15] Joseph John Thomson (1856-1940)

$\to$ selbes Ergebnis wie vorher für σ_{T}, da im integrierten Querschnitt natürlich keine Richtung (der Polarisation) ausgezeichnet

QFT: **Compton-Streuung** $\gamma\, e^- \to \gamma\, e^-$

Frequenz ($\sim$ Energie) des Photons reduziert ($\leftrightarrow$ Rückstoß des gestreuten Elektrons)

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 + \dfrac{2\hbar\omega}{m_e c^2} \sin^2 \dfrac{\theta}{2}}$$

Frequenzverminderung ist ein Quanteneffekt: $\omega' \to \omega \quad$ für $\quad \hbar \to 0$

Klein-Nishina-Formel[16] für Streuung unpolarisierter Photonen:

$$\frac{d\sigma_{\text{unpol}}}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'}\right) - \frac{\sin^2\theta}{2}\right]$$

bisherige Betrachtung für ein einzelnes Streuzentrum: wie sieht der Wirkungsquerschnitt für N Streuzentren (Atome, Elektronen, ...) aus?

i. **inkohärente Streuung**

   wenn Streuzentren unabhängig voneinander abstrahlen $\to \sigma_N = N\,\sigma$

   Bsp.: Rayleigh-Streuung von sichtbarem Licht in Atmosphäre $\to$ Luftmoleküle statistisch verteilt: inkohärente Streuung

ii. **kohärente Streuung**

   falls konstruktive Interferenz der einzelnen Streuwellen $\to \sigma_N = N^2\,\sigma$

   Bsp.: Wasserdampf in der Atmosphäre; Wassertröpfchen mit Durchmesser zwischen ~ 2 und ~ 500 nm bestehen aus N Molekülen $\to$ für sichtbares Licht (Wellenlänge zwischen ~ 400 und ~ 700 nm) schwingen induzierte Dipolmomente in Phase $\to \vec{d}_{\text{Tröpfchen}} = N\,\vec{d}_{\text{Molekül}} \to$ Wolken weitgehend undurchsichtig, da Licht stark gestreut wird

   andererseits: homogenes Wasser hat $d > \lambda \to$ Moleküle in verschiedenen Teilen der Wassertropfen nicht mehr in Phase $\to$ homogenes Wasser relativ durchsichtig (inkohärente Streuung)

   allgemein: **kohärente** Streuung $\leftrightarrow$ **Interferenz** (konstruktiv oder destruktiv) $\to$ Paradebeispiel: Beugung von Röntgenstrahlen an Kristallen (siehe Abschnitt 3.40)

[16] Oskar Benjamin Klein (1894-1977), Yoshio Nishina (1890-1951)

3.39 Interferenz

Dipol $\vec{d}(t) = d_0\vec{e}_3 \cos\omega t$ befinde sich im Ursprung des Koordinatensystems

$\rightarrow$ am Ort $\vec{x} = r\vec{n}$ ($\vec{n} = \vec{e}_1 \sin\theta\cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\theta\sin\varphi + \vec{e}_3\cos\theta$) wird dann das elektrische Feld (Dipolnäherung)

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \frac{d_0\omega^2\sin\theta}{rc^2}\cos(\omega t - \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{|\vec{k}|} r)\,(-\vec{e}_1\cos\theta\cos\varphi - \vec{e}_2\cos\theta\sin\varphi + \vec{e}_3\sin\theta)$$

beobachtet

Magnetfeld $\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{n}\times\vec{E}(t,\vec{x})$:

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \frac{d_0\omega^2\sin\theta}{rc^2}\cos(\omega t - |\vec{k}|r)\,(\vec{e}_1\sin\varphi - \vec{e}_2\cos\varphi)$$

nun sei am Ort $\vec{y}$ ($|\vec{y}| \ll r$) ein zweiter Dipol $\vec{d}(t) = d_0\vec{e}_3\cos(\omega t+\alpha)$ (schwingt synchron, jedoch um den Winkel α phasenverschoben)

$\rightarrow$ dieser Dipol erzeugt das Feld

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{\dot{\vec{d}}(t - |\vec{x}-\vec{y}|/c)}{c|\vec{x}-\vec{y}|} \simeq \frac{\dot{\vec{d}}(t - r/c + \vec{n}\cdot\vec{y}/c)}{cr},$$

wobei hier die in der Fernzone gültige Näherung $|\vec{x}-\vec{y}| \simeq |\vec{x}| - \vec{n}\cdot\vec{y}$ verwendet wurde

$\rightarrow$ sind beide Dipole **gleichzeitig** vorhanden, so erzeugen sie das elektromagnetische Feld

$$\begin{aligned}
\vec{E}(t,\vec{x}) &= \frac{d_0\omega^2\sin\theta}{rc^2}\left[\cos(\omega t - kr) + \cos(\omega t - kr + k\vec{n}\cdot\vec{y} + \alpha)\right] \\
&\times \; (-\vec{e}_1\cos\theta\cos\varphi - \vec{e}_2\cos\theta\sin\varphi + \vec{e}_3\sin\theta) \\
\vec{B}(t,\vec{x}) &= \frac{d_0\omega^2\sin\theta}{rc^2}\left[\cos(\omega t - kr) + \cos(\omega t - kr + k\vec{n}\cdot\vec{y} + \alpha)\right](\vec{e}_1\sin\varphi - \vec{e}_2\cos\varphi)
\end{aligned}$$

mit dem Poyntingvektor

$$\vec{S}(t,\vec{x}) = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{d_0\omega^2\sin\theta}{rc^2}\right)^2\left[\cos(\omega t - kr) + \cos(\omega t - kr + k\vec{n}\cdot\vec{y} + \alpha)\right]^2\vec{n}$$

→ die Ausdrücke für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ haben die Struktur

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 \left[\cos(\omega t + \phi_1) + \cos(\omega t + \phi_2)\right] \\ &= \underbrace{2A_0 \cos\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}}_{A_R} \cos(\omega t + \phi_1/2 + \phi_2/2) \end{aligned}$$

konstruktive Interferenz für $\phi_2 - \phi_1 = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \dots$

destruktive Interferenz für $\phi_2 - \phi_1 = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$

$A(t)^2 = A_R^2 \cos^2(\omega t + \phi_1/2 + \phi_2/2)$ (z.B. Poyntingvektor)

Intensität von **zwei** Dipolen: $I_2 \sim \langle A(t)^2 \rangle = A_R^2/2$

Intensität **eines** Dipols: $I_1 \sim A_0^2/2$

→ **Verhältnis** der Intensitäten: $I_2/I_1 = 4\cos^2(\phi_2/2 - \phi_1/2)$

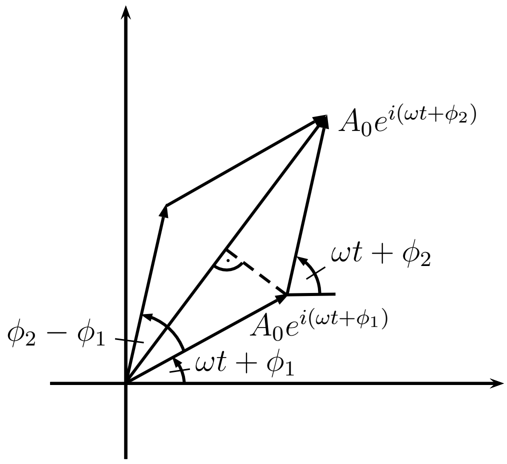


Abbildung 3.59: Ermittlung der resultierenden Amplitude A_R durch Addition komplexer Amplituden

Bemerkung: man kann zur Addition von Amplituden auch komplexe Zahlen verwenden (siehe Abb. 3.59)

$$\begin{aligned} A(t) &= \mathrm{Re}\,\mathbb{A}(t) \\ \mathbb{A}(t) &= A_0 \left[e^{i(\omega t+\phi_1)} + e^{i(\omega t+\phi_2)}\right] \\ &= \underbrace{2A_0 \cos\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}}_{A_R} e^{i(\omega t+\phi_1/2+\phi_2/2)} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ wir setzen nun den zweiten Dipol an die Stelle $\vec{y} = d\vec{e}_2$ und beobachten die Strahlung nur in der 1-2-Ebene (d.h. $\theta = \pi/2$)

$$\Rightarrow \quad \phi_2 - \phi_1 = k\,\vec{n}\cdot\vec{y} + \alpha = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\varphi + \alpha$$

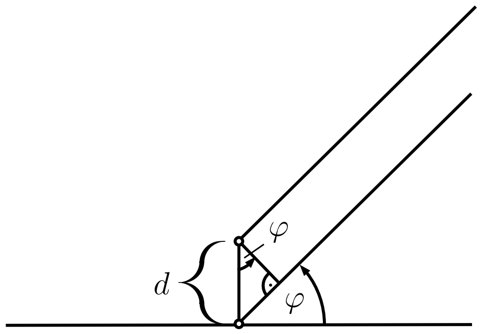


Abbildung 3.60: Zwei Dipoloszillatoren im Abstand d

Betrachtung einiger Spezialfälle:

1. $\alpha = 0$, $d = \lambda/2$ (siehe Abb. 3.61)

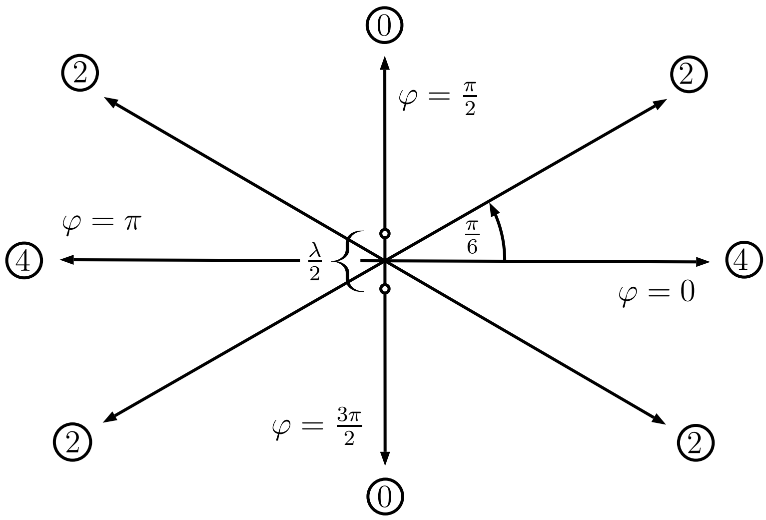


Abbildung 3.61: $\phi_2 - \phi_1 = \pi\sin\varphi$, $I_2/I_1 = 4\cos^2\frac{\pi\sin\varphi}{2}$

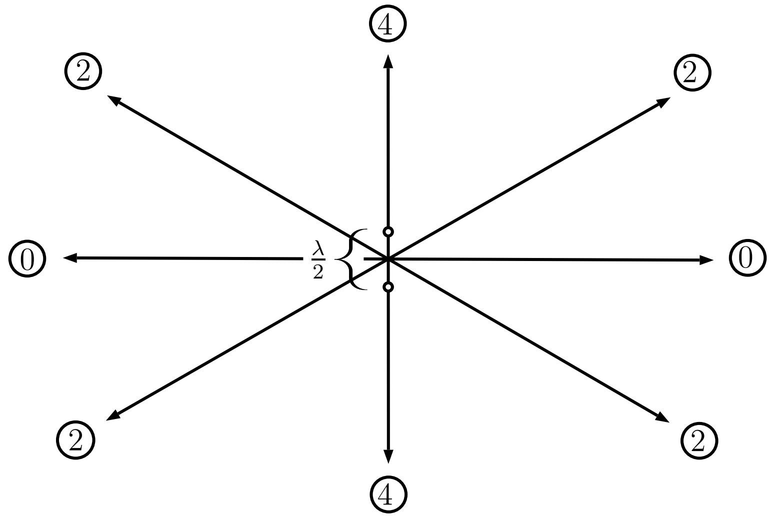


Abbildung 3.62: $\phi_2 - \phi_1 = \pi \sin\varphi + \pi$, $I_2/I_1 = 4\cos^2\frac{\pi(\sin\varphi+1)}{2}$

2. $\alpha = \pi$, $d = \lambda/2$ (siehe Abb. 3.62)

3. $\alpha = \pi/2$, $d = \lambda/4$ (siehe Abb. 3.63)

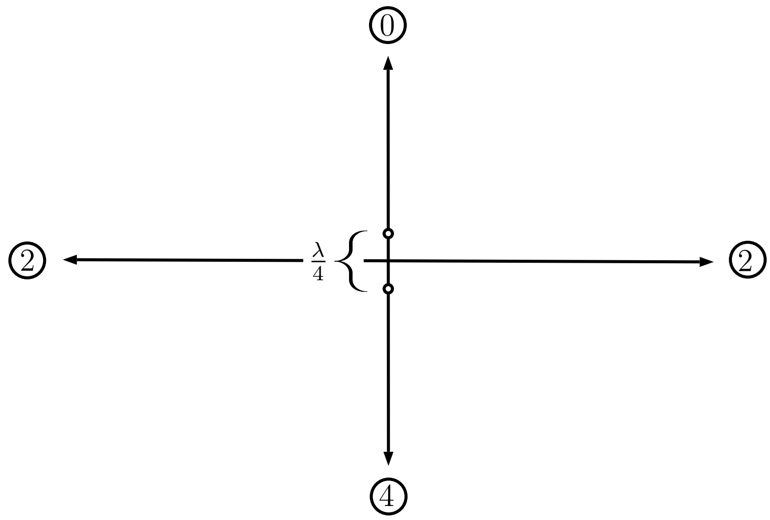


Abbildung 3.63: $\phi_2 - \phi_1 = \frac{\pi(\sin\varphi+1)}{2}$, $I_2/I_1 = 4\cos^2\frac{\pi(\sin\varphi+1)}{4}$ (sendet bevorzugt in nur eine Richtung)

3.40 Röntgenbeugung an Kristallen

betrachte identische Atome an den Gitterplätzen $\vec{x}_r$

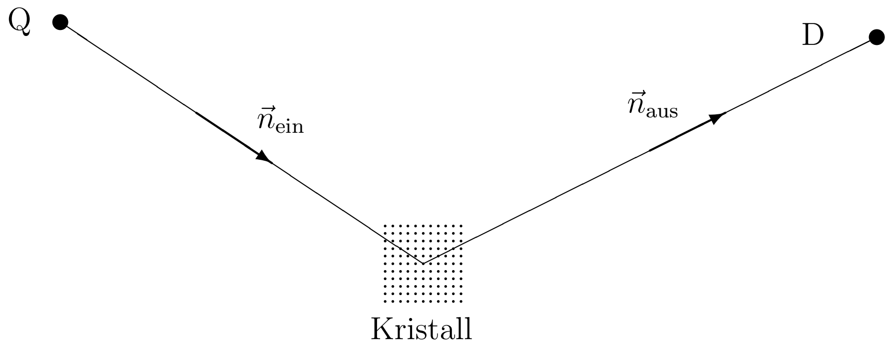


Abbildung 3.64: Streuung von Röntgenstrahlen an einem Kristall

einlaufende Welle $\vec{E}_{\text{ein}}(t,\vec{x}) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k\vec{n}_{\text{ein}} \cdot \vec{x})$ (mit $|\vec{n}_{\text{ein}}| = 1$) verursacht Dipolmomente $\vec{d}_r(t) \sim \vec{E}_{\text{ein}}(t,\vec{x}_r)$, die zu einem Strahlungsfeld $\vec{E}_{\text{aus}}(t,\vec{x})$ führen $\to$ dieses von allen Dipolen erzeugte Strahlungsfeld $\vec{E}_{\text{aus}}(t,\vec{x})$ hat das Vektorpotential ($|\vec{n}_{\text{aus}}| = 1$)

$$\begin{aligned}
\vec{A}_{\text{aus}}(t, R\vec{n}_{\text{aus}}) &= \frac{1}{c}\sum_r \frac{\dot{\vec{d}}_r(t - |R\vec{n}_{\text{aus}} - \vec{x}_r|/c)}{|R\vec{n}_{\text{aus}} - \vec{x}_r|} \\
&\sim \vec{E}_0 \,\mathrm{Re} \sum_r \frac{e^{i(\omega t - k|R\vec{n}_{\text{aus}} - \vec{x}_r| - k\vec{n}_{\text{ein}}\cdot\vec{x}_r)}}{|R\vec{n}_{\text{aus}} - \vec{x}_r|} \\
&\sim \frac{\vec{E}_0}{R}\,\mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t - kR)} \sum_r e^{ik(\vec{n}_{\text{aus}} - \vec{n}_{\text{ein}})\cdot\vec{x}_r}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad d\sigma_{\text{Kristall}} = d\sigma_{\text{Atom}} \left| \sum_r e^{ik(\vec{n}_{\text{aus}} - \vec{n}_{\text{ein}})\cdot\vec{x}_r} \right|^2$$

ein **kubisches** Gitter werde durch $\vec{x}_r = a(r_1, r_2, r_3)$ mit ganzen Zahlen $r_i = 0, \ldots, N-1$ $(i = 1,2,3)$ beschrieben $\to$ müssen den folgenden Ausdruck untersuchen:

$$\left|\sum_r e^{i\vec{\Delta}\cdot\vec{x}_r}\right|^2 = \left|\sum_{r_1} e^{ia\Delta_1 r_1}\right|^2 \left|\sum_{r_2} e^{ia\Delta_2 r_2}\right|^2 \left|\sum_{r_3} e^{ia\Delta_3 r_3}\right|^2 , \quad \vec{\Delta} = k(\vec{n}_{\text{aus}} - \vec{n}_{\text{ein}})$$

→ geometrische Reihe

$$s_i = \sum_{r_i=0}^{N-1} e^{ia\Delta_i r_i} = \frac{1 - e^{ia\Delta_i N}}{1 - e^{ia\Delta_i}} \quad \Rightarrow \quad |s_i|^2 = \frac{\sin^2 \frac{a\Delta_i N}{2}}{\sin^2 \frac{a\Delta_i}{2}}$$

→ wir müssen also die Funktion

$$F(\phi) = \frac{\sin^2 \frac{\phi N}{2}}{\sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

untersuchen, wobei N sehr groß ist: $F(0) = N^2$; erste Nullstelle für $\phi N/2 = \pi$; nächstes (lokales) Maximum ungefähr bei $\phi N/2 = 3\pi/2$, wobei $F(3\pi/N) \simeq 4N^2/(3\pi)^2 = 0.045N^2$; zweite Nullstelle bei $\phi N/2 = 2\pi$; weiteres (lokales) Maximum ungefähr bei $\phi N/2 = 5\pi/2$ mit $F(5\pi/N) = 4N^2/(5\pi)^2 = 0.016N^2$; usw.

→ starke Maxima ($F = N^2$) wieder für $\phi = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, d.h. $\phi = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

→ Röntgenbeugung findet nur dann statt, falls

$$\frac{2\pi a}{\lambda}(\vec{n}_{\text{aus}} - \vec{n}_{\text{ein}}) = 2\pi\vec{n}, \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^3$$

bzw.

$$a(\vec{k}_{\text{aus}} - \vec{k}_{\text{ein}}) = 2\pi\vec{n}, \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^3$$

von Lauesche[17] **Interferenzbedingung**

[17]Max von Laue (1879-1960)

Kapitel 4

Elekrodynamik der Kontinua

4.1 Makroskopische Elektrodynamik

bisher: **mikroskopische** Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ und **mikroskopische** Ladungs- und Stromverteilung ρ, $\vec{j}$

unmöglich (und unnötig), elektromagnetische Felder für $\sim 10^{24}$ Ladungen zu berechnen → **Mittelung** über **makroskopisch kleine** aber **mikroskopische große** Raumgebiete

→ gemittelte Größen $\langle\vec{E}\rangle$, $\langle\vec{B}\rangle$, $\langle\rho\rangle$, $\langle\vec{j}\rangle$

Größe der Raumgebiete, über die gemittelt wird?

→ müssen eine genügend große Anzahl von Ladungen enthalten, aber auch klein genug sein, um durch die räumliche Mittelung Effekte des **sichtbaren** Lichts (Reflexion, Brechung) nicht zu verwischen

Bezeichnungen:

$a \ldots$ typische Atom- oder Molekülgröße ($a \sim 1$ Å= 0.1 nm)

$L \ldots$ lineare Dimension des Mittelungsgebietes

$\lambda \ldots$ Wellenlänge des sichtbaren Lichts ($400\,\mathrm{nm} \lesssim \lambda \lesssim 700\,\mathrm{nm}$)

$$a \ll L \ll \lambda \quad \Rightarrow \quad L \sim 10\,\mathrm{nm}$$

→ im Volumen $L^3 \sim 10^{-24}\,\mathrm{m}^3$ sind in der Regel noch etwa 10^6 Kerne und Elektronen

→ gemittelte Felder sinnvoll im optischen Bereich, nicht im Röntgenbereich ($\lambda_{\text{Röntgen}} \sim$ Å) und natürlich erst recht nicht für γ-Strahlung

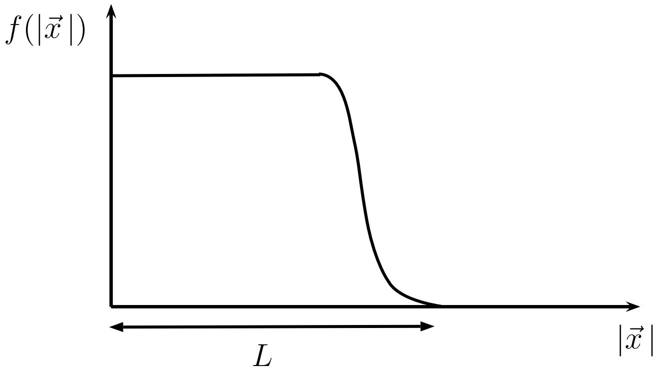


Abbildung 4.1: Mittelungsfunktion

Mittelungsfunktion $f(|\vec{x}|)$ (rotationssymmetrisch), $\int d^3x\, f(|\vec{x}|) = 1$

Mittelung:

$$\langle \vec{E}_{\mathrm{mikr}} \rangle = \int d^3y\, f(|\vec{y}\,|)\, \vec{E}_{\mathrm{mikr}}(t, \vec{x} + \vec{y}\,) =: \vec{E}(t, \vec{x})$$

gemitteltes Feld wieder mit $\vec{E}$ bezeichnet, obwohl jetzt andere Bedeutung als das ursprüngliche Feld $\vec{E}_{\mathrm{mikr}}$ (analog für $\vec{B}$, ρ, $\vec{j}$)

wichtig: es gibt **keine** neue Elektrodynamik in Materie!

Maxwell-Gleichungen sind die fundamentalen Feldgleichungen auch in kontinuierlichen Medien; makroskopische Maxwell-Gleichungen sind phänomenologische Näherungen, die in der Praxis von großem Nutzen sind

makroskopische Maxwell-Gleichungen schauen zunächst wie die fundamentalen Maxwell aus, ausgenommen

$$\rho,\ \vec{j} \qquad \to \qquad \text{gemittelte Größen}\ \ \langle \rho \rangle,\ \langle \vec{j} \rangle$$

Grund: partielle Ableitungen kommutieren mit Mittelung der Felder

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(t, \vec{x}) &= \int d^3y\, f(|\vec{y}\,|)\, \frac{\partial}{\partial t}\, \vec{E}_{\mathrm{mikr}}(t, \vec{x} + \vec{y}\,) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{E}(t, \vec{x}) &= \int d^3y\, f(|\vec{y}\,|)\, \frac{\partial}{\partial x_i}\, \vec{E}_{\mathrm{mikr}}(t, \vec{x} + \vec{y}\,) \end{aligned}$$

analog für Magnetfeld $\vec{B}(t, \vec{x})$

4.2 Polarisierung und Magnetisierung

wie sind $\langle\rho\rangle$, $\langle\vec{j}\rangle$ zu verstehen?

mittlere Ladungsdichte $\langle\rho\rangle$: Materie besteht aus Atomen, Molekülen (elektrisch neutral) und „freien"Ladungsträgern (Ionen, Elektronen)

$\rightarrow$ Aufspaltung: $\langle\rho\rangle = \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{geb}}$

Form von ρ_{geb}:

mikroskopische Ladungsdichte eines am Ursprung befindlichen elektrisch **neutralen** Atoms oder Moleküls (auf Bereich der Größe $a \sim 1$ Å konzentriert):

$$\rho_\alpha(t,\vec{x}), \qquad \int d^3x\, \rho_\alpha(t,\vec{x}) = 0$$

bewegt sich das Atom (Molekül) längs der Trajektorie $t \rightarrow \vec{r}_\alpha(t)$, so ist seine Ladungsverteilung

$$\rho_\alpha\left(t, \vec{x} - \vec{r}_\alpha(t)\right)$$

$\rightarrow$ gesamte mikroskopische Ladungsverteilung **aller** neutralen Atome (Moleküle):

$$\sum_\alpha \rho_\alpha\left(t, \vec{x} - \vec{r}_\alpha(t)\right)$$

Mittelung:

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{geb}}(t,\vec{x}) &= \left\langle \sum_\alpha \rho_\alpha\left(t, \vec{x} - \vec{r}_\alpha(t)\right) \right\rangle \\
&= \sum_\alpha \int d^3y\, f(|\vec{y}|)\, \rho_\alpha(t, \underbrace{\vec{x} - \vec{r}_\alpha(t) + \vec{y}}_{\vec{z}}) = \sum_\alpha \int d^3z\, f(|\vec{x} - \vec{r}_\alpha(t) - \vec{z}|)\, \rho_\alpha(t,\vec{z}) \\
&= \sum_\alpha \int d^3z \left[f(|\vec{x} - \vec{r}_\alpha(t)|) - \vec{z} \cdot \vec{\nabla} f(|\vec{x} - \vec{r}_\alpha(t)|) + \ldots \right] \rho_\alpha(t,\vec{z}) \\
&= \sum_\alpha f(|\vec{x} - \vec{r}_\alpha(t)|) \underbrace{\int d^3z\, \rho_\alpha(t,\vec{z})}_{=0} - \vec{\nabla} \sum_\alpha f(|\vec{x} - \vec{r}_\alpha(t)|) \underbrace{\int d^3z\, \vec{z}\, \rho_\alpha(t,\vec{z})}_{\vec{d}_\alpha(t)} + \ldots \\
&= -\vec{\nabla} \sum_\alpha f(|\vec{x} - \vec{r}_\alpha(t)|)\, \vec{d}_\alpha(t) + \ldots
\end{aligned}$$

Bemerkung: Mittelungsfunktion wurde in Dipolnäherung um $\vec{x} - \vec{r}_\alpha(t)$ entwickelt daher in Dipolnäherung:

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{geb}}(t,\vec{x}) &= -\vec{\nabla}\sum_\alpha \vec{d}_\alpha(t)\,f(\vec{x}-\vec{r}_\alpha(t)) \\
&= -\vec{\nabla}\int d^3y \sum_\alpha \vec{d}_\alpha(t)\,\delta^{(3)}(\vec{y}-\vec{r}_\alpha(t))\,f(\vec{x}-\vec{y}) \\
&= -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}(t,\vec{x}) =: \rho_{\text{pol}}(t,\vec{x})
\end{aligned}$$

Definition: **Polarisierung**

$$\vec{P}(t,\vec{x}) = \left\langle \sum_\alpha \vec{d}_\alpha(t)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{r}_\alpha(t)) \right\rangle = \frac{\text{elektr. Dipolmoment}}{\text{Volumen}} = \text{Dipoldichte}$$

integrierte Polarisierung: $\int\limits_V d^3x\,\vec{P}(t,\vec{x}) = \sum\limits_{\alpha\in V} \vec{d}_\alpha(t)$ Probe: Gesamtdipolmoment in $V = \int\limits_V d^3x\,\vec{x}\,\rho_{\text{pol}}(t,\vec{x}) = -\int\limits_V d^3x\,\vec{x}\,\text{div}\vec{P}(t,\vec{x}) \overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_V d^3x\,\vec{P}(t,\vec{x})$ $\surd$

Ladungserhaltung $\rightarrow$ Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho\rangle + \vec{\nabla}\cdot\langle\vec{j}\rangle = 0$

muss separat für die freien Ladungen gelten: $\dot{\rho}_{\text{frei}} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{\text{frei}} = 0$

Analyse für die **gemittelte Stromdichte**: $\langle\vec{j}(t,\vec{x})\rangle = \vec{j}_{\text{frei}}(t,\vec{x}) + \vec{j}_{\text{geb}}(t,\vec{x})$

Definition der magnetischen Dipoldichte $\vec{M}(t,\vec{x})$ (**Magnetisierung**) der gebundenen (neutralen) Objekte:

$$\vec{M}(t,\vec{x})\,d^3x = \sum_{\alpha\in d^3x} \vec{m}_\alpha(t)$$

diese Magnetisierung führt auf einen gemittelten Strom (alles in Dipolnäherung!)

$$\vec{j}_{\text{mag}}(t,\vec{x}) = c\,\vec{\nabla}\times\vec{M}(t,\vec{x})$$

Probe: i-te Komponente des Gesamtdipolmoments im Gebiet $V = \frac{1}{2c}\int\limits_V d^3x\,\varepsilon_{ijk}x_j j_{\text{mag},k} = \frac{1}{2c}\int\limits_V d^3x\,\varepsilon_{ijk}x_j(c\varepsilon_{k\ell s}\nabla_\ell M_s) = \frac{1}{2}(\delta_{is}\delta_{j\ell}-\delta_{i\ell}\delta_{jm})\int\limits_V d^3x\,x_j\nabla_\ell M_s$ $\overset{\text{Gauß}}{=} \int\limits_V d^3x\,M_i$ $\surd$

kann allerdings noch nicht alles sein: auch Polarisierung trägt zum gemittelten Strom bei

$$\begin{aligned}
\langle\rho(t,\vec{x})\rangle &= \rho_{\text{frei}}(t,\vec{x}) + \rho_{\text{pol}}(t,\vec{x}) \\
\langle\vec{j}(t,\vec{x})\rangle &= \vec{j}_{\text{frei}}(t,\vec{x}) + \vec{j}_{\text{mag}}(t,\vec{x}) + \vec{j}_{\text{pol}}(t,\vec{x})
\end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung $\rightarrow$

$$\dot{\rho}_{\text{pol}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{mag}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{pol}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\text{pol}} = -\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{P}}$$

$\rightarrow$ konsistente (und richtige) Wahl:

$$\vec{j}_{\text{pol}}(t, \vec{x}) = \dot{\vec{P}}(t, \vec{x})$$

Form der homogenen Maxwell-Gleichungen bleibt bei der Mittelung unverändert:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \, , \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Mittelung betrifft nur die inhomogenen Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi \langle \rho \rangle = 4\pi \left(\rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{pol}} \right) = 4\pi\rho_{\text{frei}} - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \underbrace{\left(\vec{E} + 4\pi \vec{P} \right)}_{\vec{D}} &= 4\pi\rho_{\text{frei}} \end{aligned}$$

elektrisches Hilfsfeld:

$$\boxed{\vec{D} := \vec{E} + 4\pi \vec{P}}$$

daher

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_{\text{frei}}$$

letzte Maxwell-Gleichung:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \left(\vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{mag}} + \vec{j}_{\text{pol}} \right) \\ &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{frei}} + 4\pi \, \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{4\pi}{c} \dot{\vec{P}} \\ \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \underbrace{\left(\vec{B} - 4\pi \vec{M} \right)}_{\vec{H}} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\vec{E} + 4\pi \vec{P} \right)}_{\vec{D}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{frei}} \end{aligned}$$

magnetisches Hilfsfeld:

$$\boxed{\vec{H} := \vec{B} - 4\pi \vec{M}}$$

Maxwell-Gleichungen in Materie
(Dipolnäherung)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\dot{\vec{B}}/c \qquad & \operatorname{div}\vec{D} &= 4\pi\,\rho_{\text{frei}} \\ \operatorname{rot}\vec{H} &= 4\pi\,\vec{j}_{\text{frei}}/c + \dot{\vec{D}}/c \qquad & \operatorname{div}\vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Lorentz-Kraft: nach wie vor durch die (jetzt gemittelten) Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$ bestimmt allerdings mit ρ_{frei}, $\vec{j}_{\text{frei}}$: $\vec{F}_V(t) = \int\limits_V d^3x \left[\rho_{\text{frei}}(t,\vec{x})\vec{E}(t,\vec{x}) + \frac{1}{c}\vec{j}_{\text{frei}}(t,\vec{x}) \times \vec{B}(t,\vec{x})\right]$

Problem: ρ_{frei}, $\vec{j}_{\text{frei}}$ legen i. Allg. $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$ noch nicht fest; $\vec{P}$, $\vec{M}$ normalerweise nicht vorgegeben, sondern stellen sich erst in Abhängigkeit von $\vec{E}$, $\vec{B}$ ein $\rightarrow$ weitere phänomenologische Annahmen notwendig

atomistische Erklärung von Polarisierung und Magnetisierung:

a. induzierte $\vec{P}$, $\vec{M}$

   Atome, Moleküle besitzen zunächst keine Dipolmomente, durch äußeres Feld werden sie aber induziert (Deformation der Elektronenhülle) $\rightarrow$ $\vec{P} \,||\, \vec{E}$, $\vec{M}$ antiparallel $\vec{B}$ (Lenzsche Regel, Diamagnetismus)

b. Orientierungspolarisierung, -magnetisierung

   Atome, Moleküle besitzen Dipolmomente, die aber zunächst zufallsverteilt sind; werden im äußeren Feld ausgerichtet $\rightarrow$ $\vec{P} \,||\, \vec{E}$, $\vec{M} \,||\, \vec{B}$ (Paramagnetismus) wegen Drehmoment der äußeren Felder auf Dipolmomente

c. spontane $\vec{P}$, $\vec{M}$

   benachbarte Dipole wechselwirken miteinander $\rightarrow$ Dipoldichte $\neq 0$ auch ohne äußere Felder; starke Temperaturabhängigkeit (nur für kleine T; Phasenübergang bei $T = T_c$) und nur in geordneten Medien: Ferroelektrizität, Ferromagnetismus $\rightarrow$ komplizierter Zusammenhang zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$, bzw. $\vec{H}$ und $\vec{B}$ (Hysterese) $\rightarrow$ Physik der kondensierten Materie

4.3 Elektrostatik von Leitern

elektrostatische Gleichungen für gemittelte Größen in Abwesenheit von Dielektrika:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$$

Bemerkung: hier ist $\rho = \rho_{\text{frei}}$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\phi \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = -4\pi\rho$$

$\rightarrow$ bei **vorgegebenem** ρ können wir die Lösung der Poissongleichung sofort hinschreiben:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3y \, \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

bei Anwesenheit von Leitern haben wir aber das Problem, dass wir die Ladungsverteilung auf diesen **nicht** kennen $\rightarrow$ wissen aber: im statischen Fall muss das elektrische Feld im **Inneren** eines Leiters verschwinden

Grund: nichtverschwindendes Feld würde einen Strom hervorrufen $\rightarrow$ Ausbreitung eines Stromes im Leiter ist jedoch mit Dissipation von Energie verbunden und kann daher ohne äußere Energiequellen nicht als stationärer Zustand aufrecht erhalten werden

$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho \wedge \vec{E} = 0$ im Inneren des Leiters $\Rightarrow$ Ladungen können nur an der **Oberfläche** des Leiters sitzen

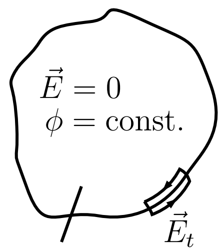


Abbildung 4.2: Im Inneren eines Leiters verschwindet das elektrische Feld. Wegen des Satzes von Stokes muss daher auch die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes im Außenraum in unmittelbarer Nähe der Leiteroberfläche verschwinden

$\operatorname{rot}\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E}_t = 0 \rightarrow$ das elektrostatische Feld steht also in jedem Oberflächenpunkt des Leiters **normal** auf die Oberfläche

Flächenladungsdichte σ an der Oberfläche des Leiters:

$$\int d\vec{f} \cdot \vec{E} = 4\pi \int d^3x \, \rho \quad \Rightarrow \quad E_n F = 4\pi\sigma F \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial\phi}{\partial n} = E_n = 4\pi\sigma$$

Gesamtladung des Leiters:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial V} df\, E_n = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial V} df\, \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

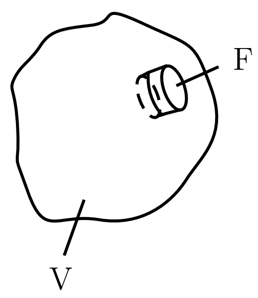


Abbildung 4.3: Zur Berechnung der Oberflächenladungsdichte σ

Randwertproblem ohne Ladungen außerhalb der Leiter: gesucht Lösung der Laplacegleichung $\Delta\phi = 0$, die an den Leiteroberflächen konstante Werte annimmt (siehe Abb. 4.4)

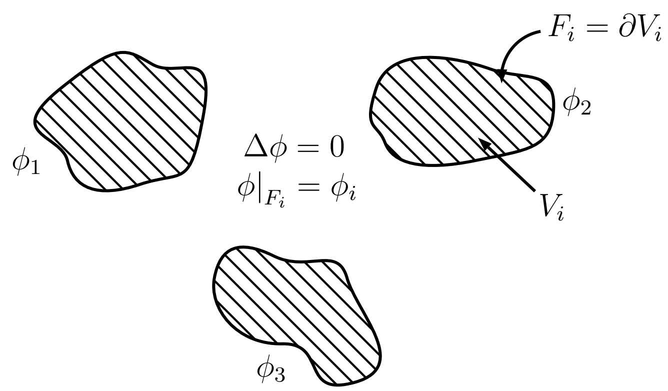


Abbildung 4.4: Randwertproblem in der Elektrostatik von Leitern. Der Raum zwischen den Leitern ist ladungsfrei

analog: Randwertproblem **mit** Ladungen ρ_{ext} außerhalb der Leiter $\to$ gesucht Lösung der Poissongleichung $\Delta\phi = -4\pi\rho_{\text{ext}}$, die an den Leiteroberflächen konstante Werte annimmt

4.4 Faradayscher Käfig

ladungsfreier Hohlraum, der ganz von einem Leiter umschlossen ist:

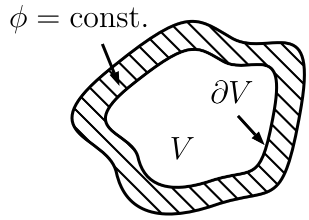


Abbildung 4.5: Faradayscher Käfig

$\phi = \text{const.}$ (im Inneren des Hohlraums) ist sicher eine Lösung von $\Delta\phi = 0$ mit der gewünschten Randbedingung $\Rightarrow \vec{E} = -\text{grad}\,\phi = 0$ im Inneren

Eindeutigkeit der Lösung: angenommen es gibt eine zweite Lösung $\tilde{\phi} \rightarrow \psi = \tilde{\phi} - \phi$ erfüllt dann ebenfalls die Laplacegleichung $\Delta\psi = 0$, aber mit der Randbedingung $\psi|_{\partial V} = 0$

$$\begin{aligned}
\int_V d^3x\,\nabla_i\psi\nabla_i\psi &= \int_V d^3x\,\nabla_i(\psi\nabla_i\psi) - \int_V d^3x\,\psi\,\underbrace{\Delta\psi}_{0} \\
&= \int_{\partial V} df_i\,\psi\nabla_i\psi = 0 \\
&\Rightarrow\ \nabla_i\psi(\vec{x}) = 0\ \ \forall\ \vec{x} \in V \\
&\Rightarrow\ \psi(\vec{x}) = 0\ \ (\text{wegen } \psi|_{\partial V} = 0) \\
&\Rightarrow\ \tilde{\phi} = \phi
\end{aligned}$$

Bemerkung: dieser Eindeutigkeitsbeweis funktioniert nicht nur für den Faradayschen Käfig, sondern ganz allgemein für die Lösung der Laplace- oder Poissongleichung bei Vorgabe von Randbedingungen, denn

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= -4\pi\rho_{\text{ext}}\ \wedge\ \Delta\tilde{\phi} = -4\pi\rho_{\text{ext}}\ \text{ mit }\ \phi|_{\partial V} = \tilde{\phi}|_{\partial V} \\
&\Rightarrow\ \Delta\underbrace{(\tilde{\phi} - \phi)}_{\psi} = 0,\ \ \psi|_{\partial V} = 0
\end{aligned}$$

und den weiteren Beweisschritten wie oben

4.5 Minimax-Eigenschaft des Potentials

Behauptung: Potential $\phi(\vec{x})$ des elektrostatischen Feldes nimmt seine Maxima oder Minima **nicht** im **ladungsfreien Gebiet**, sondern nur am Rand (= Leiteroberflächen) an

Beweis: angenommen ϕ hätte im ladungsfreien Gebiet ein Minimum (oder Maximum) am Ort $\vec{x} \to$ dann kann man ein kleines Gebiet G um $\vec{x}$ finden, sodass für die Ableitung in Richtung der Normalen auf den Rand ∂G gilt:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\partial G} \overset{>}{(<)} 0$$

$$-\underbrace{\int_{\partial G} d\vec{f}\cdot\vec{E}}_{Q_G} = \int_{\partial G} df\,\frac{\partial\phi}{\partial n} \overset{>}{(<)} 0$$

$\Rightarrow Q_G \neq 0 \to$ da G sich im **ladungsfreien** Raum befindet, ist dies ein **Widerspruch**!

$\Rightarrow$ eine punktförmige Probeladung q kann sich im **ladungsfreien** Gebiet **nicht** im stabilen Gleichgewicht befinden $\to$ dazu müsste nämlich $q\phi(\vec{x})$ ein Minimum besitzen $\to$ für stabiles Gleichgewicht müsste $q\vec{E}$ so wie in Abb. 4.6 ausschauen, was (wegen des Satzes von Gauß) div$\vec{E} \neq 0$ implizieren würde

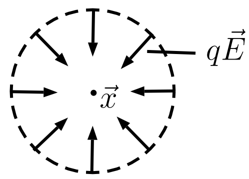


Abbildung 4.6: Kraft auf eine Probeladung bei stabilem Gleichgewicht

Bemerkung: allerdings kann eine Ladung im stabilen Gleichgewicht sein, wenn es **zusätzliche mechanische** Zwangsbedingungen gibt

Bemerkung: mit Hilfe der Minimax-Eigenschaft des Potentials kann man sich ebenfalls von der Eindeutigkeit von ϕ beim Faradayschen Käfig überzeugen

4.6 Einfache elektrostatische Beispiele

Plattenkondensator:

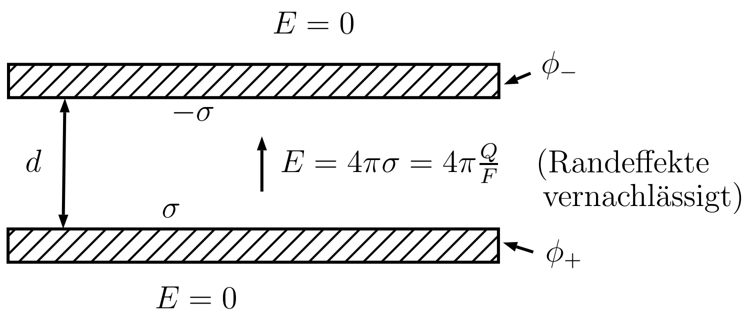


Abbildung 4.7: Plattenkondensator

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E} = \phi(\vec{x}_1) - \phi(\vec{x}_2) =: U$$

$U \ldots$ **Spannung** (Potentialdifferenz)

in unserem Fall: $Ed = \phi_+ - \phi_- = U \to U = 4\pi Q d/F$

Definition der **Kapazität**: $C = Q/U$

Plattenkondensator: $C = F/(4\pi d)$ (Dimension einer Länge)

geladene Metallkugel:

Radius R, Mittelpunkt im Ursprung, Ladung Q

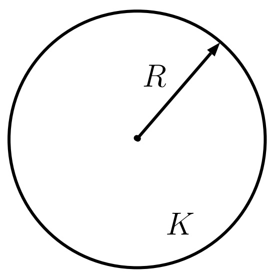


Abbildung 4.8: Geladene Kugel

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{x}) &= \frac{Q}{|\vec{x}|}, \quad |\vec{x}| \geq R \\
\vec{E}(\vec{x}) &= \frac{Q\vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \quad |\vec{x}| \geq R \\
\sigma &= \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{1}{4\pi} E_n|_{\partial K} \checkmark
\end{aligned}$$

$U = \phi(R) - \phi(\infty) = Q/R \Rightarrow$ Kapazität $C = R$

zwei leitend verbundene **Metallkugeln**:

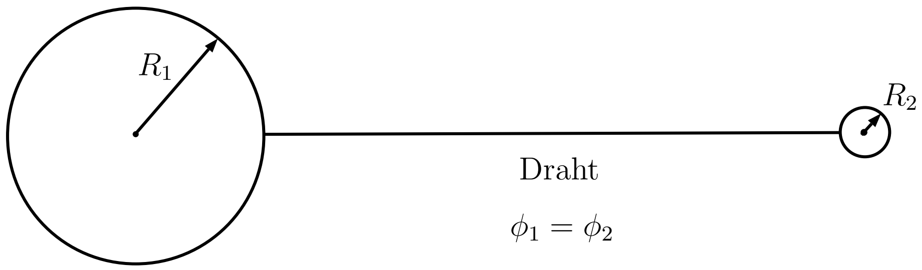


Abbildung 4.9: Zwei weit entfernte Metallkugel auf gleichem Potential

Potentiale an den Kugeloberflächen gleich:

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Normalkomponenten der Feldstärken an den Kugeloberflächen:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \frac{Q_1}{R_1^2}, \quad E_2 = \frac{Q_2}{R_2^2} \\
&\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1}
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ je kleiner der Radius, desto stärker das Feld

Anwendung: **Feldemissionsmikroskop** ($|\vec{E}|$ bis 10^9 V/m erreicht) $\rightarrow$ Feynman Lectures Bd. II

4.7 Energie des elektrostatischen Feldes von Leitern

$$\mathcal{E}_{\text{Feld}} = \frac{1}{8\pi}\int d^3x\,\vec{E}^2$$

Bemerkung: in dieser Formel steht das **gemittelte** Feld $\vec{E} \equiv \langle \vec{E}_{\text{mikr}} \rangle$

$\vec{E}^2 \equiv \langle \vec{E}_{\text{mikr}} \rangle^2 \neq \langle \vec{E}^2_{\text{mikr}} \rangle$ (**keine** Berücksichtigung der **inneren** Energie des Leiters)

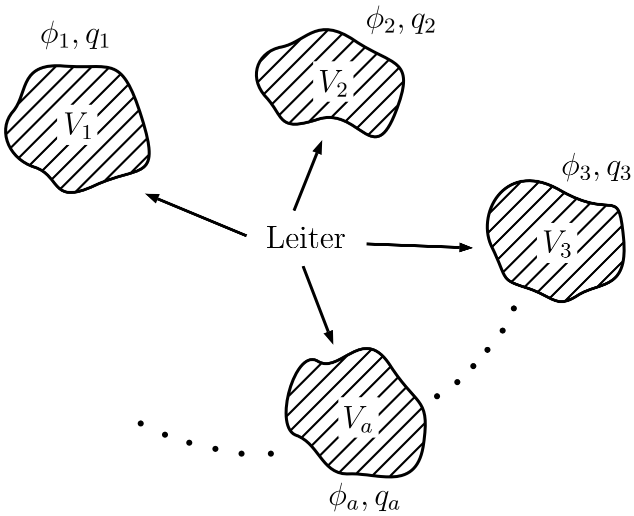


Abbildung 4.10: Zur Berechnung der Feldenergie

→ Integrationsgebiet ist also das Raumgebiet außerhalb der Leiter (da das Feld innerhalb der Leiter verschwindet):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\text{Feld}} &= -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus\cup_a V_a} d^3x\,E_i\nabla_i\phi \\
&= -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus\cup_a V_a} d^3x\,\nabla_i(E_i\phi) + \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus\cup_a V_a} d^3x\,\underbrace{(\nabla_i E_i)}_{=0}\phi \\
&= +\frac{1}{8\pi}\sum_a\int\limits_{\partial V_a} df_i\,E_i\phi = \frac{1}{8\pi}\sum_a\phi_a\underbrace{\int\limits_{\partial V_a} d\vec{f}\cdot\vec{E}}_{4\pi q_a} \\
&= \frac{1}{2}\sum_a q_a\phi_a
\end{aligned}$$

Bemerkung: Verallgemeinerung von $Q = CU$:

$$q_a = \sum_b C_{ab}\phi_b$$

C_{aa} ... **Kapazitätskoeffizienten**

C_{ab} $(a \neq b)$ ... **elektrostatische Induktionskoeffizienten**

4.8 Kraft auf einen Leiter

elektrisches Feld übt auf die Oberfläche eines Leiters bestimmte Kräfte aus $\rightarrow$ Maxwellscher Spannungstensor (für $\vec{B} = 0$):

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(E_i E_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\vec{E}^2\right)$$

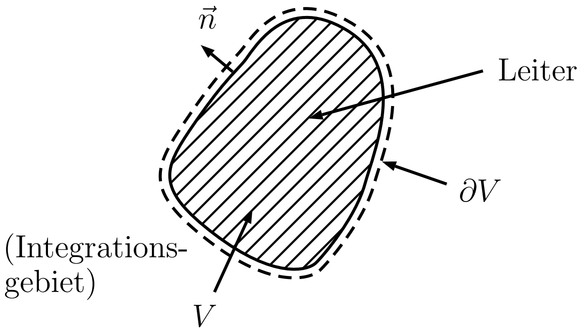


Abbildung 4.11: Kraft auf einen Leiter

Kraft auf den Leiter:

$$F_i = \int_{\partial V} df_k \, \frac{1}{4\pi}\left(E_i E_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\vec{E}^2\right)$$

da $\vec{E}|_{\partial V} \parallel \vec{n}$:

$$F_i = \frac{1}{8\pi}\int df \, n_i \, \vec{E}^2 = \int df \, G_i$$

Kraft/Fläche:

$$\vec{G} = \vec{n}\,\frac{\vec{E}^2}{8\pi} = 2\pi\sigma^2\vec{n} = \frac{\sigma\vec{E}}{2}$$

$\rightarrow$ Zug nach außen

Beispiel: Plattenkondensator

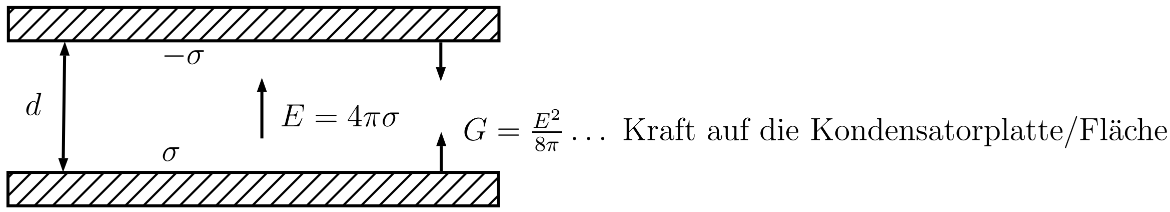


Abbildung 4.12: Flächenkraftdichte auf eine Kondensatorplatte

auf die Kondensatorplatte wirkende Kraft kann man auch durch folgende Überlegung erhalten: untere Platte wird festgehalten und obere Platte um ein Stück Δd nach oben verschoben $\rightarrow$ Energie pro Fläche wird dann um $\Delta d\, E^2/8\pi$ vergrößert (E bleibt unverändert, da σ nicht geändert wird) $\rightarrow$ man muss also die Flächenkraftdichte $E^2/8\pi$ nach **oben** wirken lassen um die Platte zu verschieben $\rightarrow$ auf die Platte wirkt vom Feld die Flächenkraftdichte $E^2/8\pi$ nach **unten**

4.9 Methode der Spiegelladungen

zwei Ladungen $\pm q$ im Abstand $2a$:

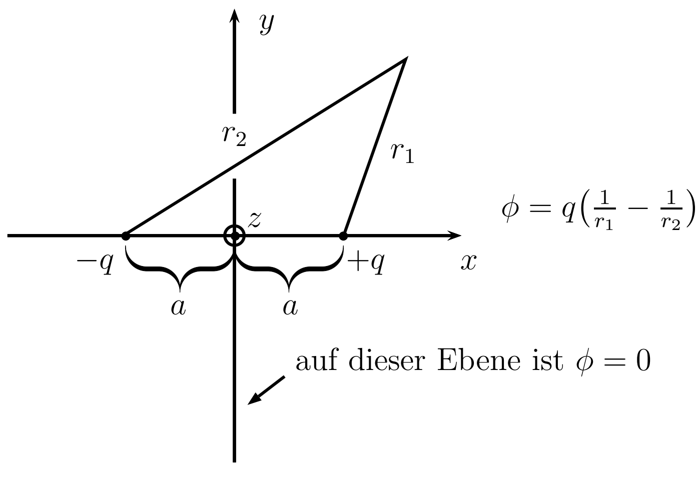


Abbildung 4.13: Potential zweier entgegengesetzt gleich großer Ladungen

$\rightarrow$ damit haben wir aber auch eine Lösung für das folgende Problem:

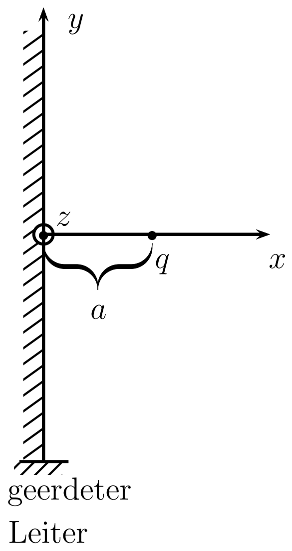


Abbildung 4.14: Geerdeter Leiter in der y-z-Ebene, im Abstand a die Punktladung q

$$\begin{aligned}
\Delta \frac{q}{r_1} &= -4\pi q\, \delta^{(3)}(\vec{x} - a\vec{e}_x) \quad \text{für } x > 0 \\
\Delta \left(-\frac{q}{r_2}\right) &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } x > 0
\end{aligned}$$

$\phi_1 = q/r_1 \ldots$ Lösung der **inhomogenen** Gleichung (für $x > 0$)

$\phi_2 = -q/r_2 \ldots$ Lösung der **homogenen** Gleichung (für $x > 0$)

$\phi = \phi_1 + \phi_2$ erfüllt die gewünschte **Randbedingung** $\phi(0, y, z) = 0$

$\rightarrow$ **elektrisches Feld**:

$$\vec{E}(x, y, z) = q \left\{ \frac{(x-a)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{(x+a)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right\} \quad \text{für } x > 0$$

$\rightarrow$ Flächenladungsdichte $\sigma = E_n/4\pi$ auf dem Leiter:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(0, y, z) &= \frac{-2qa}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_x \\
\Rightarrow \ \sigma(r, \varphi) &= \frac{-qa}{2\pi(a^2 + r^2)^{3/2}}, \qquad r^2 = y^2 + z^2,\ \varphi = \arctan(z/y)
\end{aligned}$$

Gesamtladung:

$$\begin{aligned}
\int df\,\sigma &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr\, r\, \frac{-qa}{2\pi(a^2+r^2)^{3/2}} \\
&= \int_0^{\infty} dr\, r\, \frac{-qa}{(a^2+r^2)^{3/2}} \qquad \text{Variablentransformation } u = a^2 + r^2 \\
&= -\frac{qa}{2} \int_{a^2}^{\infty} du\, u^{-3/2} = -q \checkmark
\end{aligned}$$

Kraft auf die Ladung q: $\vec{F} = -\frac{q^2}{4a^2}\vec{e}_x$

geerdete Metallkugel:

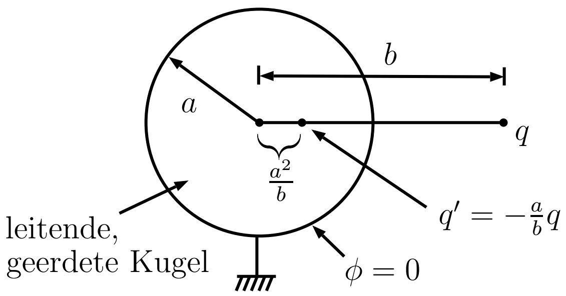


Abbildung 4.15: Geerdete leitende Kugel

Kraft auf die Ladung q: $\vec{F} = -\frac{q^2 ab}{(b^2-a^2)^2}\vec{e}_x$

isolierte Metallkugel:

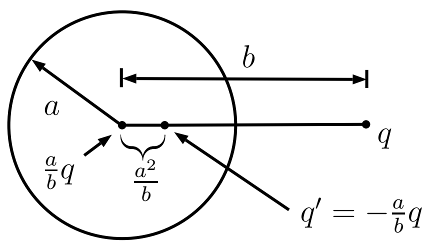


Abbildung 4.16: Isolierte leitende Kugel

Kraft auf die Ladung q: $\vec{F} = \left[-\frac{q^2 ab}{(b^2-a^2)^2} + \frac{q^2 a}{b^3}\right]\vec{e}_x \to$ nach wie vor anziehende Kraft, obwohl die Gesamtladung der Kugel verschwindet

4.10 Zweidimensionale Probleme

eine Dimension manchmal irrelevant, z.B. für (langen) leitenden Zylinder

$\rightarrow$ zweidimensionale Lösungen durch **analytische Funktionen** $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Cauchy-Riemannsche[1] Differentialgleichungen $\rightarrow \Delta u(x,y) = \Delta v(x,y) = 0$

komplexe Analysis: $f(z)$ erzeugt konforme (winkeltreue) Abbildung

$$(x,y) \rightarrow (u,v) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \text{const.} \perp v(x,y) = \text{const.}$$

Beispiel: **Zylinder** mit Basisradius R

$$\begin{aligned} f(z) &= -E_\infty \left(z + R^2/z\right) \\ &= -E_\infty \left(x + iy + \frac{R^2}{x^2+y^2}(x - iy)\right) \end{aligned}$$

$$u(x,y) = -E_\infty x \left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right)$$

$u(x,y) = \text{const.}$: Feldlinien

$$v(x,y) = -E_\infty y \left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) = \phi(x,y)$$

$v(x,y) = \text{const.}$: Äquipotentiallinien

$$\vec{E}(x,y) = -\vec{\nabla}\phi(x,y) = E_\infty \left[\frac{2xyR^2}{r^4}\vec{e}_x + \left(1 - \frac{R^2}{r^4}(x^2-y^2)\right)\vec{e}_y\right], \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$r \rightarrow \infty$: $\vec{E} \rightarrow E_\infty \vec{e}_y$ (elektrisches Feld asymptotisch in y-Richtung)

Äquipotentiallinien: $E_\infty y(1 - R^2/r^2) = \text{const.} \rightarrow x$-Achse ($y = 0$) und Zylindermantel ($r = R$) sind Äquipotentiallinien mit $\phi = 0$; $r \rightarrow \infty$: $y = \text{const.}$ sind asymptotische Äquipotentiallinien

Interpretation: Lösung beschreibt leitenden Zylinder in einem asymptotisch homogenen elektrischen Feld (in der y-Richtung)

[1] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Bernhard Riemann (1826-1866)

4.11 Elektrostatik der Nichtleiter

Erinnerung an den Plattenkondensator: $Q = CU$, $C = F/(4\pi d)$

bringt man ein Dielektrikum zwischen die Kondensatorplatten, dann **sinkt** (bei konstant gehaltener Ladung **auf** den Platten) die Spannung $U \rightarrow$ Kapazität (definiert durch $C = Q/U$) wird **größer**

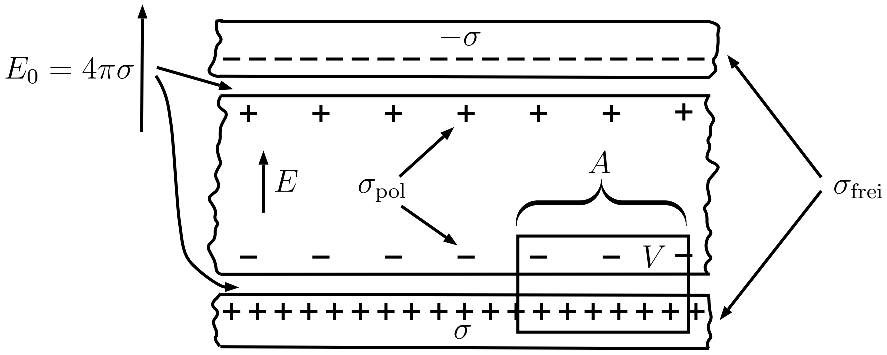


Abbildung 4.17: Plattenkondensator mit Dielektrikum

$$\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho \quad \rightarrow \quad \underbrace{\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{E}}_{EA} = 4\pi Q_V < 4\pi \underbrace{Q}_{\sigma A}$$

neutrales Atom oder Molekül:

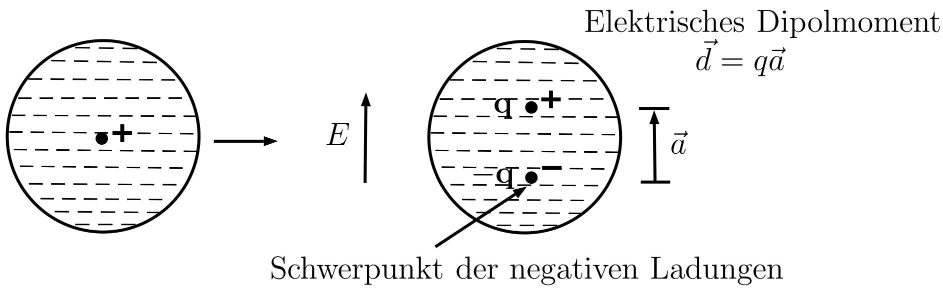


Abbildung 4.18: Neutrales Atom vor und nach dem Anlegen eines äußeren elektrischen Feldes

Polarisierung (dielektrische Polarisation): $\vec{P}(\vec{x})dV = \sum_{\alpha \in dV} \vec{d}_\alpha$

dV ... makroskopisch kleines, aber mikroskopisch großes Volumen im früher diskutierten Sinn

$\vec{P}$ ... Dipolmoment/Volumen (Dipolmomentdichte) ist $N(\vec{x})$ die Dichte der Atome oder Moleküle, so kann man auch schreiben:

$$\vec{P}(\vec{x}) = N(\vec{x})q\vec{a}$$

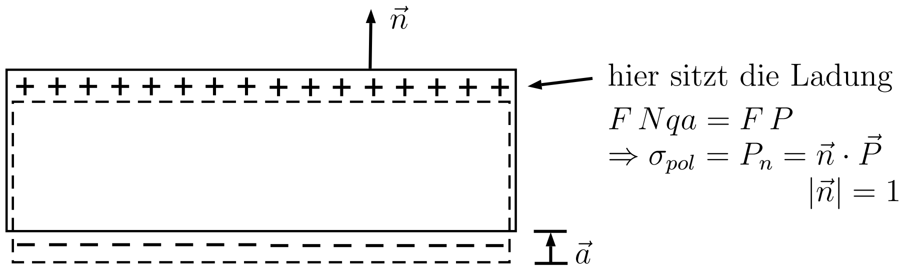


Abbildung 4.19: Dielektrikum bei angelegtem äußerem Feld

$$\begin{aligned} \vec{P} \text{ inhomogen} \quad &\Rightarrow \quad \int_V d^3x\, \rho_{\text{pol}} = -\int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{P} = -\int_V d^3x\, \text{div}\vec{P} \\ V \text{ beliebig} \quad &\Rightarrow \quad \rho_{\text{pol}} = -\text{div}\,\vec{P} \end{aligned}$$

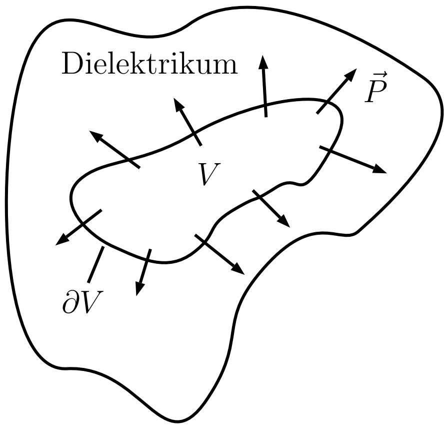


Abbildung 4.20: Räumlich inhomogene Dipoldichte in einem Dielektrikum

$\rightarrow$ konnten also die Beziehung $\rho_{\text{pol}} = -\text{div}\,\vec{P}$ reproduzieren, die wir schon durch die Mittelung der gebundenen mikroskopischen Ladungsdichte erhalten hatten

man kann diese Beziehung auch auf folgende Weise erhalten: Polarisierung $\vec{P}$

erzeugt ein Potential

$$\begin{aligned}
\phi^d(\vec{x}) &= \int d^3y\, P_j(\vec{y}) \frac{x_j - y_j}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \\
&= \int d^3y\, P_j(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \\
&= \underbrace{\int d^3y\, \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{P_j(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}}_{\int df_j \frac{P_j(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}=0} - \int d^3y\, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \text{div } \vec{P}(\vec{y}) \\
&\Rightarrow \quad \Delta\phi^d(\vec{x}) = 4\pi \text{div } \vec{P}(\vec{x}) \quad \Rightarrow \rho_{\text{pol}}(\vec{x}) = -\text{div } \vec{P}(\vec{x})
\end{aligned}$$

Gleichungen der Elektrostatik in Anwesenheitvon Nichtleitern:

$$\text{rot}\vec{E} = 0, \quad \text{div}\vec{D} = 4\pi\rho_{\text{frei}}, \qquad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

Randbedingungen an der **Grenzfläche** zweier verschiedener **Nichtleiter**:

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \times \left(\vec{E}^{(II)} - \vec{E}^{(I)}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_t^{(I)} = E_t^{(II)}$$

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho_{\text{frei}} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \left(\vec{D}^{(II)} - \vec{D}^{(I)}\right) = 4\pi\sigma_{\text{frei}} \quad \Leftrightarrow \quad D_n^{(II)} - D_n^{(I)} = 4\pi\sigma_{\text{frei}}$$

σ_{frei} ... freie Oberflächenladungsdichte an der Grenzfläche

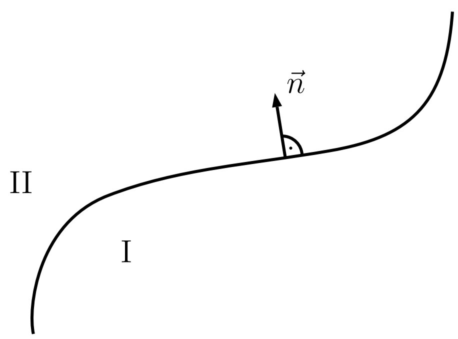


Abbildung 4.21: Grenzfläche zweier Medien

Bedingungen an der Grenzfläche zwischen **Leiter** (I) und **Nichtleiter** (II):

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_t^{(I)} = E_t^{(II)} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho_{\text{frei}} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \vec{D}^{(II)} = D_n^{(II)} = 4\pi\sigma_{\text{frei}}$$

in **isotropen** Medien und bei nicht zu großen Feldern gilt oft die Beziehung

$$\vec{P} = \chi_\mathrm{e} \vec{E}$$

$\chi_\mathrm{e} \ldots$ (di)elektrische Suszeptibilität

Bemerkung: es handelt sich um eine Materialgleichung (**kein** Naturgesetz!)

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \underbrace{(1 + 4\pi\chi_\mathrm{e})}_{\varepsilon} \vec{E}$$

$\varepsilon \ldots$ **Dielektrizitätskonstante**

allgemeinere Form (z.B. in Kristallen): $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$

$\rightarrow$ durch die Beziehung zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ wird das Gleichungssystem

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho_\mathrm{frei}$$

lösbar:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} (\varepsilon \vec{E}) = 4\pi \rho_\mathrm{frei}$$

Bemerkung: man kann natürlich mit $\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi$ (folgt aus $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$) das Potential ϕ des elektrischen Feldes einführen $\rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon \vec{\nabla} \phi) = -4\pi \rho_\mathrm{frei}$$

Grenzbedingungen an der **Trennfläche** zweier isotroper **Nichtleiter**:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad &\Rightarrow \quad E_t^{(I)} = E_t^{(II)} \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho_\mathrm{frei} \quad &\Rightarrow \quad \underbrace{\varepsilon^{(II)} E_n^{(II)}}_{D_n^{(II)}} - \underbrace{\varepsilon^{(I)} E_n^{(I)}}_{D_n^{(I)}} = 4\pi \sigma_\mathrm{frei} \end{aligned}$$

kommen nun wieder zu dem Beispiel des **Plattenkondensators** mit eingeschobenem Dielektrikum (Dielektrizitätskonstante ε) zurück:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \phi \\ \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho_\mathrm{frei} \quad &\Rightarrow \quad \vec{D} = \begin{cases} \varepsilon \vec{E} & \text{im Dielektrikum} \\ \vec{E}_0 & \text{im Vakuum} \end{cases} \end{aligned}$$

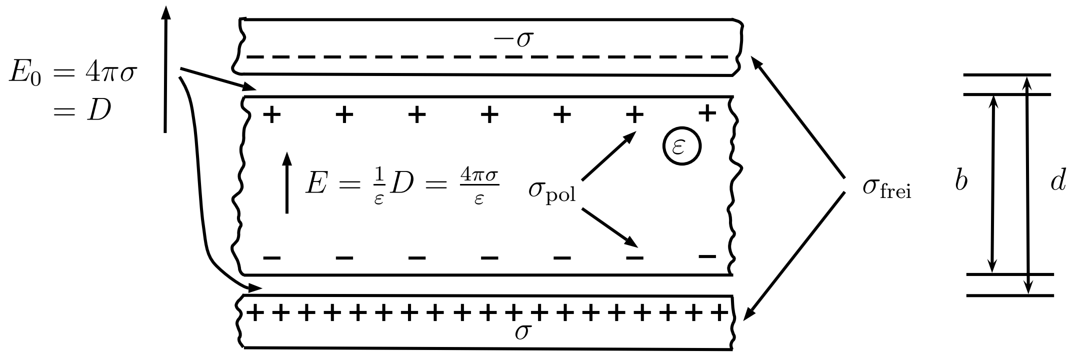


Abbildung 4.22: Plattenkondensator mit eingeschobenem Dielektrikum

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{D-E}{4\pi} = \frac{1-1/\varepsilon}{4\pi}D = \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}4\pi\sigma = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\sigma \\
&= \text{Flächenladungsdichte an der Oberfläche des Dielektrikums} \\
U &= Eb + E_0(d-b) = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}b + 4\pi\sigma(d-b) \\
&= 4\pi\sigma(b/\varepsilon + d - b) = 4\pi\,\frac{Q}{F}\,\frac{1}{\varepsilon}\,[b + \varepsilon(d-b)] \\
C &= \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon F}{4\pi[b+\varepsilon(d-b)]}
\end{aligned}
$$

für $b = d$: $C = \varepsilon F/(4\pi d)$ $\rightarrow$ Kapazität um Faktor ε größer als ohne Dielektrikum

4.12 Magnetisierung

Magnetisierung $\vec{M}(\vec{x})\ldots$ Dichte der magnetischen Dipolmomente:

$$\vec{M}(\vec{x})dV = \sum_{\alpha\in dV}\vec{m}_\alpha$$

$\rightarrow$ Magnetisierung erzeugt das Vektorpotential (siehe Abschnitt 3.20)

$$
\begin{aligned}
A_k^d(\vec{x}) &= \varepsilon_{k\ell i}\int d^3y\, M_\ell(\vec{y})\frac{x_i-y_i}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \\
&= \varepsilon_{k\ell i}\int d^3y\, M_\ell(\vec{y})\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \\
&= \varepsilon_{ki\ell}\int d^3y\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\frac{\partial}{\partial y_i}M_\ell(\vec{y})
\end{aligned}
$$

Bemerkung: bei der letzten Umformung (partielle Integration) wurde verwendet, dass $\vec{M}$ im Unendlichen verschwindet

→ entweder bereits aus dieser Formel die **Magnetisierungsstromdichte** $\vec{j}_{\text{mag}} = c \operatorname{rot} \vec{M}$ ablesen, oder:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{B} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}^d = (-\Delta + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \vec{A}^d, \\
\operatorname{div} \vec{A}^d &= \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon_{k\ell i} \int d^3y \, M_\ell(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \\
&= -\varepsilon_{k\ell i} \int d^3y \, M_\ell(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = 0 \\
\Rightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{B} &= -\Delta \vec{A}^d = 4\pi \operatorname{rot} \vec{M} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{c \operatorname{rot} \vec{M}}_{\vec{j}_{\text{mag}}}
\end{aligned}$$

Eigenschaften von $\vec{j}_{\text{mag}}$:

Kontinuitätsgleichung: $\operatorname{div} \vec{j}_{\text{mag}} = c \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{M} = 0 \checkmark$

Körper mit $\vec{M} \neq 0$ in endlichem Gebiet V, $\vec{M} = 0$ außerhalb von V; Integrationsfläche F mit $F \cap V \neq \emptyset$, Randkurve ∂F außerhalb von V:

$$I_F = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{j}_{\text{mag}} = c \int_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{M} = 0$$

gesamtes magnetisches Moment des Körpers:

$$\frac{\varepsilon_{ik\ell}}{2c} \int_V d^3x \, x_k \, j_{\text{mag}\,\ell} = \frac{\varepsilon_{ik\ell} \varepsilon_{\ell mn}}{2} \int_V d^3x \, x_k \nabla_m M_n = \int_V d^3x \, M_i$$

Beispiel: unendlich langer Zylinder mit Radius a (Zylinderachse = z-Achse) und konstanter Magnetisierung $\vec{M}(r, \varphi, z) = M\Theta(a - r)\vec{e}_z$, $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$

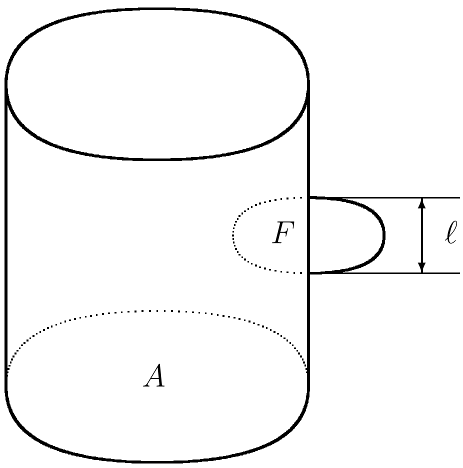
→ äquivalent zu unendlich langer Spule mit I_{mag} an der Oberfläche:

$$(\operatorname{rot} \vec{M})_\varphi = -\frac{\partial M_z}{\partial r} = M\delta(a - r)$$

Bemerkung: Rotation in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
a_r &= a_x \cos\varphi + a_y \sin\varphi, \\
a_\varphi &= a_y \cos\varphi - a_x \sin\varphi, \\
a_z &
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{rot}\vec{a})_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \\
(\operatorname{rot}\vec{a})_\varphi &= \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\
(\operatorname{rot}\vec{a})_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}
\end{aligned}
$$



$$I_F = \int_F dr\, dz\, c\, (\operatorname{rot}\vec{M})_\varphi = cM\ell$$

$$I_F A/c = M\ell A\ \surd$$

Abbildung 4.23: Strom I_F durch die Fläche F

manchmal gilt: $\vec{M} = \chi_m \vec{B}$

$\chi_m \ldots$ **magnetische Suszeptibilität**

$$\vec{H} = \underbrace{(1 - 4\pi\chi_m)}_{=:1/\mu}\vec{B}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$\mu \ldots$ **Permeabilitätskonstante** (Permeabilität)

4.13 Langsam veränderliches Nahzonenfeld

allgemein gilt:

$$A^\mu_{\text{ret}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3y\, \frac{j^\mu(t - |\vec{x}-\vec{y}|/c, \vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

Ladungs- und Stromverteilung sei auf endliches Gebiet mit Durchmesser ℓ konzentriert

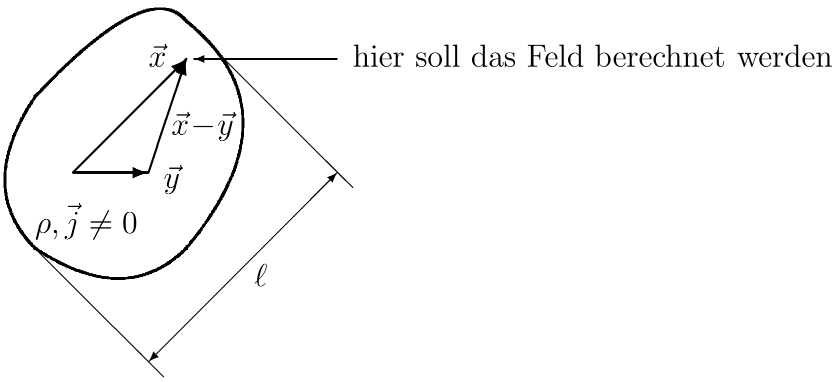


Abbildung 4.24: Berechnung des Feldes in der Nahzone

$\vec{x}$ in der Nahzone $\to |\vec{x} - \vec{y}\,| \leq \ell$

charakteristische Zeit der Ladungs- und Stromdichteänderungen: T; wenn periodisch $\to$ Frequenz $\nu = 1/T$

falls $\ell \ll Tc = \lambda$ gilt, heißt das Feld **langsam veränderlich**

Beispiele:

1. UKW-Frequenz $\nu \simeq 100\,\mathrm{MHz} = 10^8\,\mathrm{s}^{-1} \to T = 10^{-8}\,\mathrm{s} \to \lambda = Tc = 3\,\mathrm{m}$

   typischer UKW-Empfänger: $\ell =$ einige cm $\ll Tc = \lambda = 300\,\mathrm{cm} \to$ Felder in einem UKW-Empfänger sind zeitlich langsam veränderlich

2. $\nu = 50\,\mathrm{Hz} \to \lambda = c/\nu = 6000\,\mathrm{km}$

retardierte Zeit:

$$t_{\mathrm{ret}} = t - \underbrace{\frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}}_{\simeq \ell/c \ll T} \simeq t$$

daher Retardierung in erster Näherung ignoriert (instantane Näherung):

$$A^\mu_{\mathrm{ret}}(t, \vec{x}) \simeq \frac{1}{c} \int d^3y\, \frac{j^\mu(t, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \mathcal{O}(\ell/\lambda)$$

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(t,\vec{x}) &= -\operatorname{grad}\phi_{\text{ret}} - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}_{\text{ret}} \\
&\simeq \underbrace{\int d^3y\,\frac{\rho(t,\vec{y})(\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}}_{\vec{E}_{\text{inst}}(t,\vec{x})} \underbrace{-\frac{1}{c^2}\int d^3y\,\frac{\dot{\vec{j}}(t,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}}_{\vec{E}_{\text{ind}}(t,\vec{x})} \\
\vec{B}(t,\vec{x}) &= \operatorname{rot}\vec{A}_{\text{ret}} \\
&\simeq \frac{1}{c}\operatorname{rot}\int d^3y\,\frac{\vec{j}(t,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \\
&\simeq \frac{1}{c}\int d^3y\,\frac{\vec{j}(t,\vec{y})\times(\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} =: \vec{B}_{\text{inst}}(t,\vec{x}) \\
\operatorname{rot}\vec{E} &= \operatorname{rot}(\vec{E}_{\text{inst}}+\vec{E}_{\text{ind}}) = \operatorname{rot}\vec{E}_{\text{ind}} \\
&= -\frac{1}{c^2}\operatorname{rot}\int d^3y\,\frac{\dot{\vec{j}}(t,\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}_{\text{inst}}(t,\vec{x})
\end{aligned}
$$

Interpretation:

instantan: $\rho \to \vec{E}_{\text{inst}}$, $\vec{j} \to \vec{B}_{\text{inst}}$

zeitliche Änderung: $\partial\vec{j}/\partial t \to \partial\vec{B}_{\text{inst}}/\partial t \to \vec{E}_{\text{ind}}$

4.14 Ohmsches Gesetz

im **statischen** Fall hatten wir: $\vec{E}=0$ innerhalb des Leiters

zeitabhängiger Fall: $\vec{E}\neq 0 \to$ Kristallgitter übt auf die beweglichen Elektronen eine Reibungskraft aus $\to$ nach höchstens 10^{-9}s stellt sich (in einem **ruhenden** Leiter) eine stationäre Stromdichte $\vec{j}=\sigma\vec{E}$ ein (Ohmsches[2] „Gesetz“)

Ohmsches Gesetz in einem **bewegten** Leiter:

$$
\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)
$$

$\vec{v}\ldots$ Geschwindigkeit des Leiters

[2] Georg Simon Ohm (1789-1854)

$\sigma \ldots$ Leitfähigkeit (von Temperatur und Gitterfehlern abhängige Materialkonstante)

Beispiele:

Material	Pb (4.2 K)	Cu (14 K)	Cu (20°C)	Si (20°C)	Glas (20°C)
σ in s^{-1}	∞	6.5×10^{19}	5.3×10^{17}	$\sim 10^8$	$\sim 10^{-1}$

Bemerkung: $1/(\Omega \mathrm{m}) = 0.9 \times 10^{10}\,\mathrm{s}^{-1}$

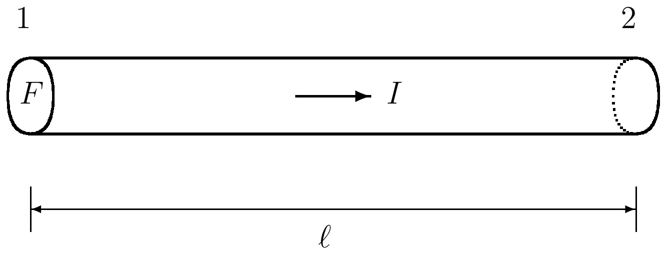


Abbildung 4.25: Draht mit Querschnittsfläche F und Länge ℓ

$$\underbrace{\int_1^2 d\vec{x} \cdot \vec{E}}_{\text{durchdenDraht}} = \frac{1}{\sigma} \int_1^2 d\vec{x} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{F} I$$

wenn kein zeitlich veränderliches Magnetfeld vorhanden:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi \quad \Rightarrow \quad \phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 d\vec{x} \cdot \vec{E} = \underbrace{\frac{\ell}{\sigma F}}_{R} I$$

$R = \ell/(\sigma F) \ldots$ **Widerstand** des Drahtes

Beispiel: Cu (20°C), $\ell = 1\,\mathrm{m}$, $F = 1\,\mathrm{mm}^2 = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \rightarrow R = 1.7 \times 10^{-2}\,\Omega$

4.15 Induktionsgesetz

Integralform von $\operatorname{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}/c$ war (siehe Abschnitt 3.23)

$$\underbrace{\int\limits_{\partial F(t)} d\vec{x} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B}\right)}_{\text{EMK}} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \underbrace{\int\limits_{F(t)} d\vec{f} \cdot \vec{B}(t, \vec{x})}_{\Phi_B}$$

gilt in dieser Form für beliebige, auch zeitlich **veränderliche** Fläche

1. betrachten zunächst den Fall einer zeitlich **konstanten** Fläche, die von einem zeitlich **veränderlichen** Magnetfeld durchflutet wird:

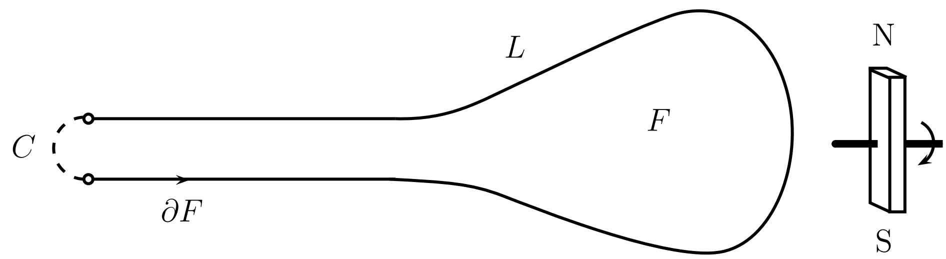


Abbildung 4.26: Induktionsgesetz für ruhende Leiterschleife mit $\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$

   in diesem Fall: Geschwindigkeit der Randkurve $\dot{\vec{x}} = 0$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial F = C+L} d\vec{x} \cdot \vec{E} &= \int\limits_C d\vec{x} \cdot \vec{E} + \int\limits_L d\vec{x} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\Phi_B \\ \int\limits_L d\vec{x} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\sigma}\int\limits_L d\vec{x} \cdot \vec{j} \underset{\sigma\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{(idealer Leiter)} \end{aligned}$$

   $\vec{E}|_C = \vec{E}_{\text{inst}}$ falls genügend weit von $\dot{\vec{B}}$ entfernt

$$\Rightarrow \quad \int\limits_C d\vec{x} \cdot \vec{E} = \int\limits_C d\vec{x} \cdot \underbrace{\vec{E}_{\text{inst}}}_{-\vec{\nabla}\phi} = \phi_1 - \phi_2$$

2. Fall einer zeitlich veränderlichen Fläche (Magnetfeld konstant):

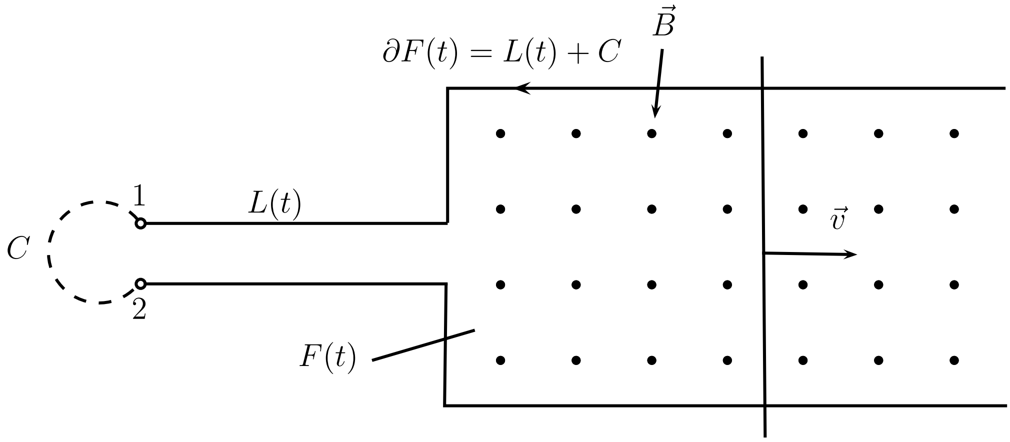


Abbildung 4.27: Konstantes Magnetfeld, bewegter Draht

$$\int_{\partial F(t)} d\vec{x} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right) = \int_C d\vec{x} \cdot \vec{E} + \int_{L(t)} d\vec{x} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right) = -\frac{1}{c} \dot{\Phi}_B$$

$$\int_{L(t)} d\vec{x} \cdot \underbrace{\left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right)}_{\vec{j}/\sigma} \underset{\sigma \to \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{(für idealen Leiter)}$$

$$\text{wie vorhin: } \int_C d\vec{x} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\Phi}_B$$

Anwendungsbeispiele:

1. „Verbraucher“ (Widerstand) zwischen den Anschlüssen $1, 2$

$$\underbrace{\oint d\vec{x} \left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right)}_{\text{EMK}} = \underbrace{\int_{1 \to 2\,(R)} d\vec{x} \cdot \vec{E}}_{RI} + \int_{2 \to 1\,(\text{id. Leiter})} d\vec{x} \cdot \underbrace{\left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right)}_{0} = -\frac{1}{c} \dot{\Phi}_B$$

$$\text{EMK} = RI = -\frac{1}{c} \dot{\Phi}_B$$

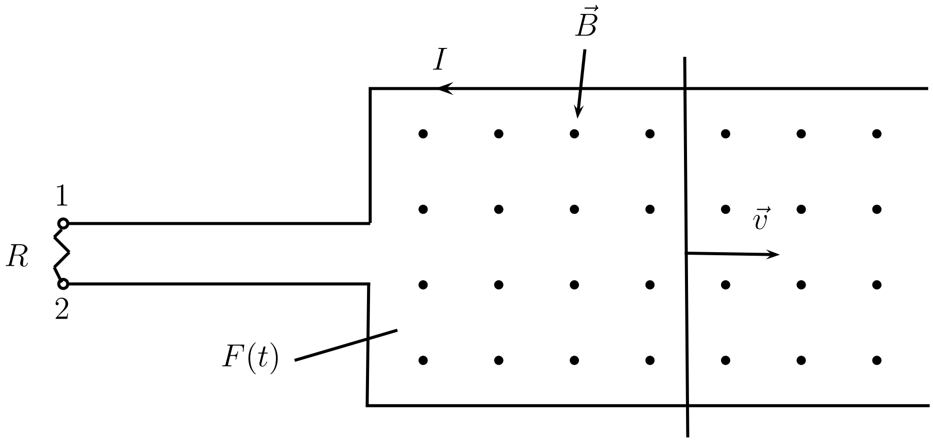


Abbildung 4.28: Widerstand R zwischen 1 und 2

2. Rotierende Metallscheibe, zeitlich konstantes Magnetfeld

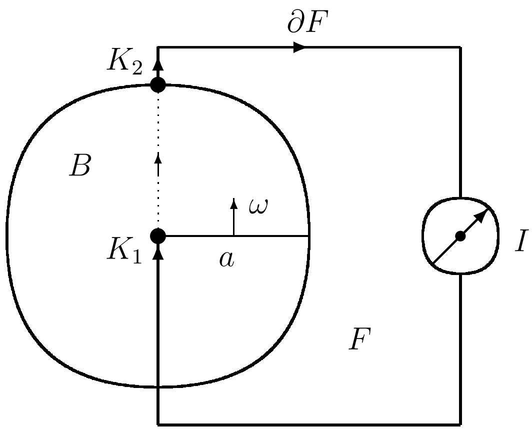


Abbildung 4.29: Metallscheibe mit Radius a rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω; normal darauf zeitlich konstantes Magnetfeld B; Schleifkontakte K_1, K_2

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right), \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{x}$$

Induktionsgesetz:

$$\int\limits_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\Phi}_B = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int\limits_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{j}/\sigma}_{IR} = \int\limits_{\partial F} d\vec{x} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}}{c} \times \vec{B} \right) = \int\limits_{\partial F} d\vec{x} \cdot \frac{\vec{\omega} \times \vec{x}}{c} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \quad IR = \int_0^a dr\,\frac{\omega r}{c} B = \frac{\omega B a^2}{2c}$$

4.16 Schaltkreise

Widerstand

$$\underbrace{\int_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{durch den Wid.}} = \int_1^2 d\vec{x}\cdot(\vec{E}_{\text{inst}} + \underbrace{\vec{E}_{\text{ind}}}_{=0}) = \phi_1 - \phi_2 = U_{12} = \int_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{j}/\sigma = RI$$

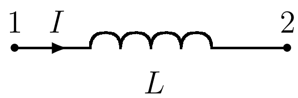
Bemerkungen: nehmen an, dass $\dot{\vec{B}} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{\text{ind}} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_{\text{inst}} = -\vec{\nabla}\phi$

$\rightarrow$ daher in **diesem** Fall:

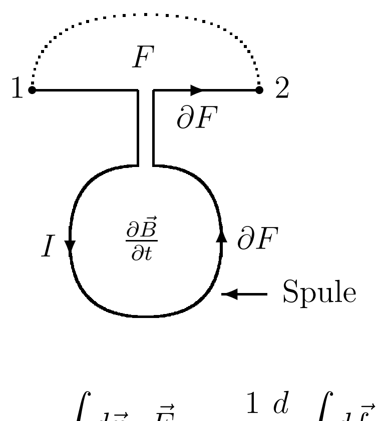
$$\underbrace{\int_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{innen}} = \underbrace{\int_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{außen}}$$

Induktivität

Symbol:



schematisch:



$$\int_{\partial F} d\vec{x}\cdot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_F d\vec{f}\cdot\vec{B}$$

$$\int\limits_{\partial F} d\vec{x}\cdot\vec{E} = \underbrace{\int\limits_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{durch den Draht}} + \underbrace{\int\limits_2^1 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{außen}} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_F d\vec{f}\cdot\vec{B}_{\text{inst}}$$

für einen idealen Leiter gilt $\vec{E} = \vec{E}_{\text{inst}} + \vec{E}_{\text{ind}} = 0$ und daher

$$\underbrace{\int\limits_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{durch den Draht}} = 0$$

weiters: $\vec{B}_{\text{inst}} \sim I$

$$\Rightarrow \underbrace{\int\limits_2^1 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{außen}} = -L\dot{I}$$

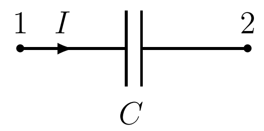
$L\ldots$ **Selbstinduktionskoeffizient**

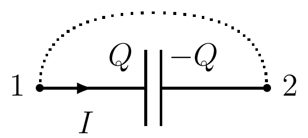
$$\underbrace{\int\limits_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{außen}} = \underbrace{\int\limits_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E}_{\text{inst}}}_{\text{außen}} = U_{12} = L\dot{I}$$

Annahme bei der ersten Umformung: $\dot{\vec{B}} = 0$ **außen**

Kapazität

Symbol:





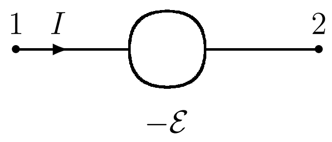
$$\dot{\vec{B}} \simeq 0 \Rightarrow \oint d\vec{x}\cdot\vec{E} = \underbrace{\int d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{durch den Draht}} + \underbrace{\int d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{zwischen den Platten}} + \underbrace{\int\limits_2^1 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{außen}} = 0 + \frac{Q}{C} + \underbrace{\int\limits_2^1 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{außen}}$$

Bemerkung: idealer Leiter angenommen

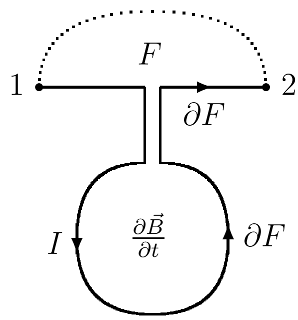
$$\Rightarrow \underbrace{\int_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{außen}} = \underbrace{\int_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E}_{\text{inst}}}_{U_{12}} = \frac{Q}{C}$$

Zusammenhang mit I: $\dot{Q} = I$

(äußere) **EMK** (unabhängig von I)

Symbol: 

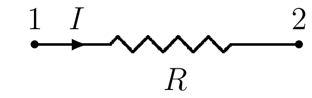
z.B.: Generator im E-Werk

schematisch: 

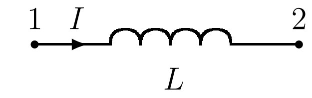
$$-\frac{1}{c}\dot{\Phi}_B = \underbrace{\mathcal{E}}_{\text{EMK}} = \int_{\partial F} d\vec{x}\cdot\vec{E} = \underbrace{\int_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{durch den Draht}} + \underbrace{\int_2^1 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{außerhalb}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E}}_{\text{außerhalb}} = \underbrace{\int_1^2 d\vec{x}\cdot\vec{E}_{\text{inst}}}_{\text{außerhalb}} = U_{12} = -\mathcal{E}$$

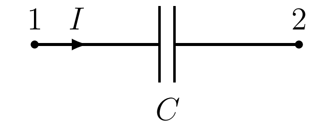
Schaltelemente (Zusammenfassung):



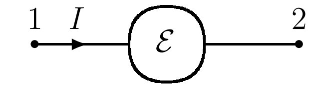
$$U_{12} = RI$$



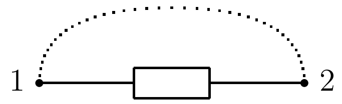
$$U_{12} = L\dot{I}$$



$$U_{12} = Q/C, \qquad \dot{Q} = I$$



$$U_{12} = -\mathcal{E}$$



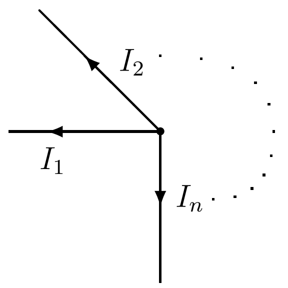
$$U_{12} = \underbrace{\int_1^2 d\vec{x} \cdot \vec{E}}_{\text{außen}} = \int_1^2 d\vec{x} \cdot \vec{E}_{\text{inst}}, \qquad \operatorname{rot} \vec{E}_{\text{inst}} = 0$$

Kirchhoffsche Regeln

Stromkreis: $1 \to 2 \to 3 \to \ldots \to N \to 1$

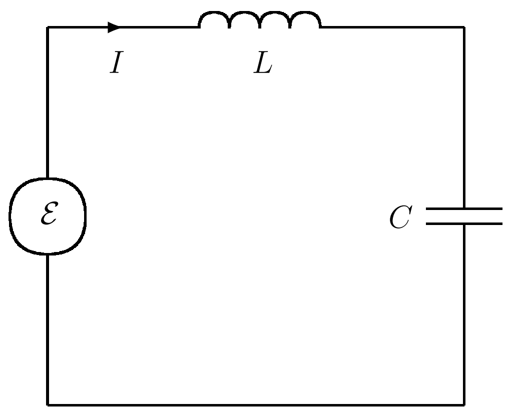
$$U_{12} + U_{23} + \ldots + U_{N1} = 0 \;\text{ da }\; \oint d\vec{x} \cdot \vec{E}_{\text{inst}} = 0$$

Summe der Spannungsabfälle verschwindet



$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Ladungen können sich nur in einem Kondensator ansammeln $\to$ Summe der aus einem Verdrahtungspunkt herausfließenden Ströme verschwindet einfachstes (idealisiertes) Beispiel: **ungedämpfter** Schwingkreis



$$-\mathcal{E} + L\dot{I} + Q/C = 0, \quad I = \dot{Q}, \quad \Rightarrow \quad L\ddot{Q} + Q/C = \mathcal{E}$$

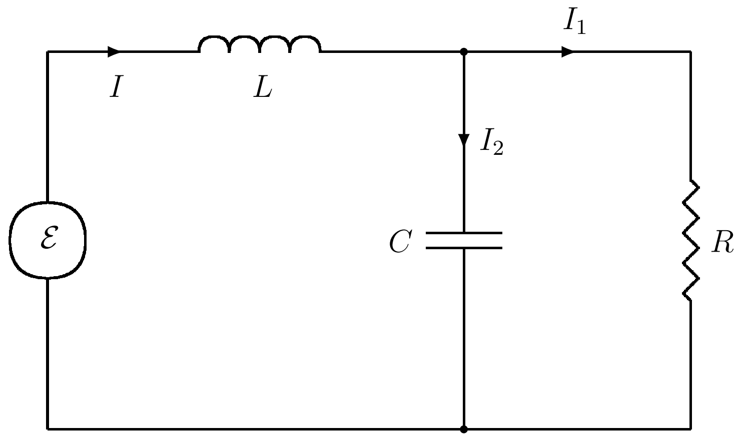
Analogie zum ungedämpften harmonischen Oszillator:

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = F \qquad Q \cong x, \quad L \cong m, \quad \mathcal{E} \cong F$$

Thomson-Formel: $\omega_0^2 = 1/LC$

homogene Lösung ($\mathcal{E} = 0$): ungedämpfte Schwingung mit Frequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

realistischeres **Anwendungsbeispiel**:



$$-\mathcal{E} + L\frac{dI}{dt} + \frac{Q_2}{C} = 0, \quad -\mathcal{E} + L\frac{dI}{dt} + RI_1 = 0, \quad I = I_1 + I_2$$
$$\Rightarrow \quad -C\dot{\mathcal{E}} + LC\ddot{I} + I_2 = 0, \quad -\mathcal{E}/R + L\dot{I}/R + I_1 = 0$$

Summe beider Gleichungen: $\ddot{I} + \dot{I}/RC + I/LC = \mathcal{E}/RLC + \dot{\mathcal{E}}/L$

harmonischer Oszillator mit Reibung und äußerer Kraft: $\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega_0^2 x = F/m$

$\rightarrow$ Eigenfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ (Thomson); Reibung $\cong$ Dämpfung: $2\rho = 1/RC$

Vor.: EMK periodische Wechselspannung $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos\omega t = \mathcal{E}_0 \,\mathrm{Re}\, e^{i\omega t}$, $\mathcal{E}_0 > 0$

allg. Lösung: $I(t) = I_s(t) + I_h(t)$

homogene Lösung $I_h(t) \propto e^{-\rho\, t} \cong e^{-t/(2RC)}$ (Einschwingvorgang)

für $t \gg RC$ bleibt nur erzwungene Schwingung übrig:

$$I(t) \simeq I_s(t) = I_0 \cos(\omega t + \delta) = I_0 \mathrm{Re}\, e^{i(\omega t + \delta)}, \quad I_0 > 0$$

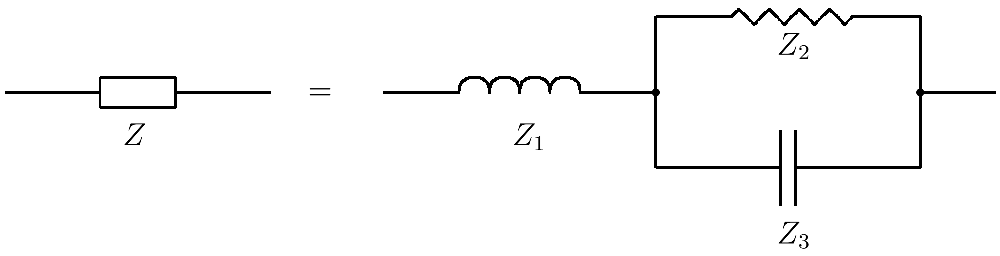
Einsetzen in Diffgl. (komplexe Notation, am Ende Realteil nehmen)

$$I_0\, e^{i\delta} \left(-\omega^2 + i\omega/RC + 1/LC\right) e^{i\omega t} = \mathcal{E}_0\, (1/RLC + i\omega/L)\, e^{i\omega t}$$

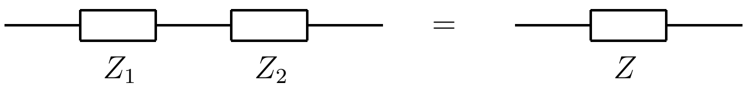
nach Vor.: $\mathcal{E}_0 > 0$, $I_0 > 0$ $\quad \rightarrow I_0\, e^{i\delta}\, Z = \mathcal{E}_0, \quad Z = e^{-i\delta}|Z|$

Impedanz (Wechselstromwiderstand) Z frequenzabhängig!

$$Z = \frac{1/LC + i\omega/RC - \omega^2}{1/RLC + i\omega/L} = \frac{1 + i\omega\, L/R - \omega^2 LC}{1/R + i\omega C} = i\omega L + \frac{1}{1/R + i\omega C}$$

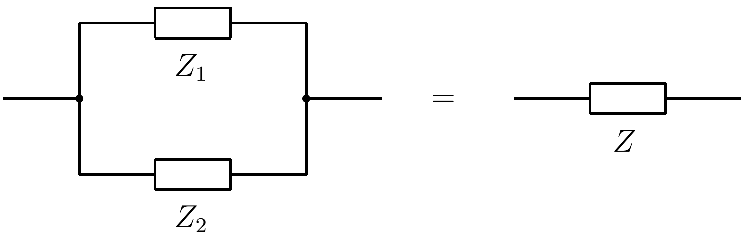


Serienschaltung:



$Z = Z_1 + Z_2$

Parallelschaltung:



$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

für unsere idealen Elemente:

$Z = R$ $\qquad$ $Z = i\omega L$ $\qquad$ $Z = 1/i\omega C$

daher in unserem Beispiel:

$$Z = Z_1 + \frac{1}{\dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z_3}} = i\omega L + \frac{1}{1/R + i\omega C}$$

Resonanz:

$$\omega \to \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Z \to \frac{i\omega_0\, L/R}{1/R + i\omega_0 C} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$R \to \infty$: 2. Kreis blockiert $\to$ 1. Kreis in Resonanz $\to \quad I_0 = \mathcal{E}_0/|Z| \to \infty$

$\to$ sehr großer Strom für $\omega \to \omega_0$

Impedanz: große Vereinfachung komplizierter Schaltungen durch komplexe Notation

4.17 Wellenleiter

Wellen in durch **Metallwände** begrenztem Volumen:

endliches Volumen → **Hohlraumresonator**

Volumen in einer Richtung unbegrenzt → **Wellenleiter** (z.B. Koaxialkabel)

Randbedingungen an Metalloberfläche? Vor.: Frequenzen nicht zu groß, d.h. Zeitabhängigkeit des Feldes nicht zu stark → Idealisierung des perfekten Leiters wie in der Elektrostatik:

$$\vec{E}_\mathrm{t}|_{\partial V} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \times \vec{E}|_{\partial V} = 0$$

mit Normalenvektor $\vec{n}$ auf Metalloberfläche

Magnetfeld:

$$\dot{\vec{B}} = -c\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \cdot \dot{\vec{B}} = -c(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} = -c\vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{n})$$

daher insgesamt Randbedingungen an Metalloberfläche ∂V:

$$\vec{n} \times \vec{E}|_{\partial V} = 0 \ , \qquad\qquad \vec{n} \cdot \dot{\vec{B}}|_{\partial V} = 0$$

gute Näherung für Radiofrequenzen ($\nu \lesssim 10^9$ Hz), sicher nicht für UV-Frequenzen oder höher ($\nu \gtrsim 10^{16}$ Hz); Metalle können für sehr große Frequenzen transparent werden

rechteckiger Wellenleiter:

in $z-$Richtung offen, rechteckiger Querschnitt: $0 \leq x \leq L_1, \ 0 \leq y \leq L_2$

im Inneren Vakuum: $\quad \Box\, \vec{E} = \Box\, \vec{B} = 0$

Rechteckquerschnitt erlaubt Lösung mit Separationsansatz:

$$E_i = f_i(x)\, g_i(y)\, h_i(z)\, T_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{1}{E_i}\Box\, E_i = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{f_i''}{f_i} + \frac{g_i''}{g_i} + \frac{h_i''}{h_i} - \frac{1}{c^2}\frac{T_i''}{T_i} = 0$$

Folgerung: mit $\omega_i^2 = c^2\,(k_{1i}^2 + k_{2i}^2 + k_{3i}^2)$

$$\frac{f_i''}{f_i} = -k_{1i}^2 \ , \quad \frac{g_i''}{g_i} = -k_{2i}^2 \ , \quad \frac{h_i''}{h_i} = -k_{3i}^2 \ , \quad \frac{T_i''}{T_i} = -\omega_i^2$$

→ Lösung ist Produkt ebener Wellen, z.B. $f_i(x) = f_i(0)e^{\pm i k_{1i} x}$

E_1 muss verschwinden für $y = 0$ und $y = L_2$ (Tangentialkomponente)

$$\Rightarrow \quad g_1(y) \propto \sin\frac{n_1 \pi y}{L_2} \qquad (n_1 = 0, 1, 2, \dots)$$

(d.h. $k_{21} = \pm\, n_1\pi/L_2$)

analog für E_2:

$$f_2(x) \propto \sin\frac{m_1 \pi x}{L_1}$$

(Vorzeichen egal)

E_3 tangential für $x = 0$, L_1 und $y = 0$, L_2:

$$\Rightarrow \quad E_3 \propto \sin\frac{m_2\pi x}{L_1}\, \sin\frac{n_2 \pi y}{L_2}$$

und daher:

$$\begin{aligned} E_1 &= C_1\, f_1(x)\, \sin\frac{n_1\pi y}{L_2}\, e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} \\ E_2 &= C_2\, \sin\frac{m_1\pi x}{L_1}\, g_2(y)\, e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} \qquad\qquad (k_{3i} \equiv k_i) \\ E_3 &= C_3\, \sin\frac{m_2\pi x}{L_1}\, \sin\frac{n_2\pi y}{L_2}\, e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} \end{aligned}$$

Koeffizienten C_i i. Allg. komplex: am Ende immer Realteil zu nehmen

jede Komponente erfüllt Wellengleichung, außerdem muss $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ gelten $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 = {} & C_1\, f_1'(x)\, \sin\frac{n_1\pi y}{L_2}\, e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + C_2\, \sin\frac{m_1 \pi x}{L_1}\, g_2'(y)\, e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} \\ & + i\, k_3\, C_3\, \sin\frac{m_2\pi x}{L_1}\, \sin\frac{n_2\pi y}{L_2}\, e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} \end{aligned}$$

gilt $\forall\, t \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 =: \omega$
gilt $\forall\, z \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 = k_3 =: k_z$

außerdem: $m_1 = m_2 =: m$ und $n_1 = n_2 =: n$ und

$$\begin{aligned} f_1'(x) \propto \sin\frac{m\pi x}{L_1} \quad &\Rightarrow \quad f_1(x) \propto \cos\frac{m\pi x}{L_1} \\ g_2'(y) \propto \sin\frac{n\pi y}{L_2} \quad &\Rightarrow \quad g_2(y) \propto \cos\frac{n\pi y}{L_2} \end{aligned}$$

Lösung für $\vec{E}$ (mit $\omega^2 = c^2\,(\frac{m^2\pi^2}{L_1^2} + \frac{n^2\pi^2}{L_2^2} + k_z^2)$):

$$\begin{aligned}
E_1 &= C_1 \cos\frac{m\pi x}{L_1}\,\sin\frac{n\pi y}{L_2}\,e^{i(k_z z - \omega t)}\\
E_2 &= C_2 \sin\frac{m\pi x}{L_1}\,\cos\frac{n\pi y}{L_2}\,e^{i(k_z z - \omega t)}\\
E_3 &= C_3 \sin\frac{m\pi x}{L_1}\,\sin\frac{n\pi y}{L_2}\,e^{i(k_z z - \omega t)}
\end{aligned}$$

zusätzlich $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$ zu erfüllen:

$$\Rightarrow \quad -C_1\frac{m\pi}{L_1} - C_2\frac{n\pi}{L_2} + i\,k_z\,C_3 = 0$$

$\rightarrow$ 2 unabhängige Amplituden = 2 unabhängige Polarisationen

Magnetfeld $\vec{B}$ bereits bestimmt wegen

$$\dot{\vec{B}} = -c\vec{\nabla}\times\vec{E} = -i\,\omega\,\vec{B}$$

erfüllt automatisch $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$, $\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$ und Randbedingung

z.B.:

$$B_3 = -i\frac{c}{\omega}\left(\frac{C_2 m\pi}{L_1} - \frac{C_1 n\pi}{L_2}\right)\cos\frac{m\pi x}{L_1}\,\cos\frac{n\pi y}{L_2}\,e^{i(k_z z - \omega t)}$$

für $m = n = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{B} = 0$ (triviale Lösung) $\rightarrow$ untere Schranke für mögliche Frequenzen (Filter!):

$$\omega \geq c\,\pi \min\left(\frac{1}{L_1}, \frac{1}{L_2}\right)$$

ohne Beweis: wenn $E_3 = B_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{B} = 0$

daher: allgemeine Lösung ist Überlagerung von

transversale elektrische Wellen	TE	$E_3 = 0,\ B_3 \neq 0$
transversale magnetische Wellen	TM	$E_3 \neq 0,\ B_3 = 0$

Koaxialkabel: konzentrische Kreiszylinder $\rightarrow$ auch TEM-Wellen mit $E_3 = B_3 = 0$

Hohlraumresonator (endliches Volumen): auch k_z quantisiert $\rightarrow$ rein diskretes Frequenzspektrum $\rightarrow$ stehende Wellen analog schwingender Saite

reale Systeme: $\vec{E}$, $\vec{B}$ dringen in Metall ein $\rightarrow$ Ohmsche Verluste, gedämpfte Wellen

4.18 Kramers-Kronig-Relationen

betrachten **zeitabhängiges Feld** in einem kontinuierlichen Medium

beschränken uns auf elektrisches Feld; Polarisierung jetzt nicht mehr instantan $\rightarrow$ Ansatz (Dimension der Suszeptibilität jetzt $[\chi_e]$ =Zeit^{-1}): zeitliche Faltung

$$\vec{P}(t,\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \chi_e(t')\, \vec{E}(t-t',\vec{x})$$

Kausalität: $\vec{P}(t,\vec{x})$ kann nur von $\vec{E}(t-t',\vec{x})$ für $t'>0$ (d.h. aus früheren Zeiten) beeinflusst werden

$$\Rightarrow \quad \chi_e(t) = 0 \quad \text{für} \quad t<0$$

Fouriertransformation:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t} \qquad \text{für} \quad f = \vec{P},\, \vec{E},\, \chi_e$$

Theorie der Fouriertransformation (leicht zu verifizieren): Faltung $\rightarrow$ Produkt, d.h.

$$\tilde{\vec{P}}(\omega,\vec{x}) = \tilde{\chi}_e(\omega)\, \tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{x})$$

$\rightarrow$ fouriertransformierte Suszeptibilität $\tilde{\chi}_e(\omega)$ wieder dimensionslos

$$\tilde{\vec{D}}(\omega,\vec{x}) = \tilde{\varepsilon}(\omega)\, \tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{x}) = [1 + 4\pi\, \tilde{\chi}_e(\omega)]\, \tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{x})$$

im Oszillatormodell:

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + \frac{4\pi n_0 q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}$$

Bem.: $\varepsilon(t)$ immer reell, $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ i. Allg. komplex (wie im Oszillatormodell)

untersuchen $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ als Funktion der komplexen Variablen ω

Pole von $\tilde{\varepsilon}(\omega)$, wenn $\omega^2 + i\omega\Gamma - \omega_0^2 = 0$

Vor.: $\omega_0 > \Gamma/2 \quad \rightarrow$

$$\omega_{1,2} = -\frac{i\Gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}$$

beide Pole in der unteren Halbebene wegen $\Gamma > 0$ (Dämpfung)

Beh.: kein Zufall, sondern folgt ganz allgemein aus der Kausalität

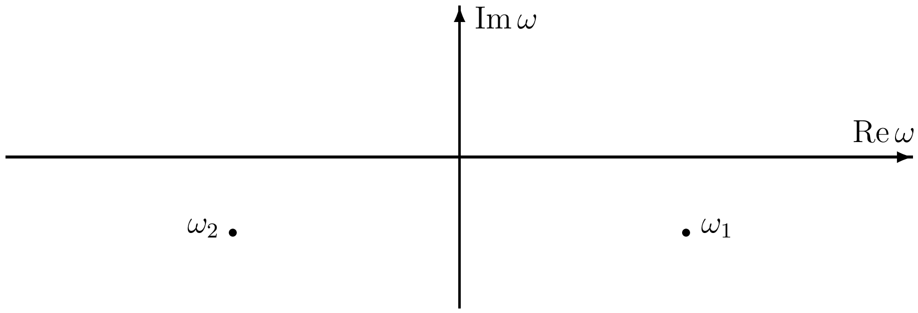


Abbildung 4.30: Pole von $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ im Oszillatormodell in der komplexen ω-Ebene

Bew.: da $\chi_e(t) = 0$ für $t < 0$

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + 4\pi\,\tilde{\chi}_e(\omega) = 1 + 4\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\,\chi_e(t)\,e^{i\omega t} = 1 + 4\pi \int\limits_{0}^{\infty} dt\,\chi_e(t)\,e^{i\omega t}$$

zerlegen ω in Real- und Imaginärteil: $\omega = \omega_r + i\omega_i \rightarrow$

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + 4\pi \int\limits_{0}^{\infty} dt\,\chi_e(t)\,e^{i\omega_r t - \omega_i t}$$

$\rightarrow$ Integral $\exists$ stets für $\omega_i \geq 0$ wegen $t \geq 0$ $\rightarrow$ $\tilde{\varepsilon}(\omega)$ ist analytisch in der oberen Halbebene (und hat dort insbesondere keine Pole)

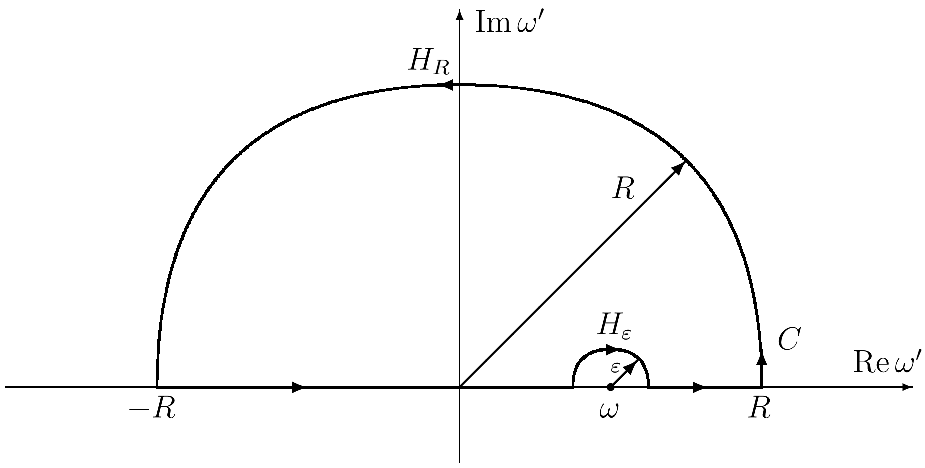


Abbildung 4.31: Wegintegral in der komplexen Ebene

$$\text{Cauchy :}\quad 0 = \oint\limits_C d\omega'\,\frac{\tilde{\varepsilon}(\omega') - 1}{\omega' - \omega} = \left(\int\limits_{-R}^{\omega-\varepsilon} + \int\limits_{H_\varepsilon} + \int\limits_{\omega+\varepsilon}^{R} + \int\limits_{H_R}\right) d\omega'\,\frac{\tilde{\varepsilon}(\omega') - 1}{\omega' - \omega}$$

Integral über Halbkreis H_R verschwindet für $R \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon} + \int_{H_\varepsilon} + \int_{\omega+\varepsilon}^{\infty} = H\int_{-\infty}^{\infty} + \int_{H_\varepsilon} = 0$$

mit Hauptwert(integral)

$$H\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon} + \int_{\omega+\varepsilon}^{\infty}\right)$$

andererseits folgt aus dem Residuensatz (**Halb**kreis H_ε, negativer Umlaufsinn):

$$\int_{H_\varepsilon} d\omega' \, \frac{\tilde{\varepsilon}(\omega') - 1}{\omega' - \omega} = -i\pi \left[\tilde{\varepsilon}(\omega) - 1\right]$$

$$\Rightarrow \quad H\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \frac{\tilde{\varepsilon}(\omega') - 1}{\omega' - \omega} = i\pi \left[\tilde{\varepsilon}(\omega) - 1\right]$$

und man erhält daher explizit die **Dispersionsrelation**

$$\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 - \frac{i}{\pi} H \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\tilde{\varepsilon}(\omega') - 1}{\omega' - \omega}$$

Dispersionsrelation verbindet $\mathrm{Re}\,\tilde{\varepsilon}(\omega)$ (**Dispersion**) und $\mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}(\omega)$ (**Absorption**)
$\chi_e(t)^* = \chi_e(t)$ impliziert

$$\mathrm{Re}\,\tilde{\varepsilon}(-\omega) = \mathrm{Re}\,\tilde{\varepsilon}(\omega) \;, \qquad \mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}(-\omega) = -\mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}(\omega)$$

Zerlegung der Dispersionsrelation in Real- und Imaginärteil und Benützung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) = \int_{0}^{\infty} d\omega \left[f(\omega) + f(-\omega)\right]$$

ergibt die **Kramers-Kronig-Relationen**[3]:

$$\mathrm{Re}\,\tilde{\varepsilon}(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} H\int_0^{\infty} d\omega' \, \frac{\omega' \mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2}, \qquad \mathrm{Im}\,\tilde{\varepsilon}(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} H\int_0^{\infty} d\omega' \, \frac{\mathrm{Re}\,\tilde{\varepsilon}(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2}$$

[3]Hendrik Anthony Kramers (1894-1952), Ralph Kronig (1904-1995)

diese Relationen folgen einzig und allein aus der Kausalität

Konsequenzen:

i. im statischen Limes ($\omega = 0$) ist $\tilde{\varepsilon}(0)$ immer reell (da $\operatorname{Im}\tilde{\varepsilon}(0) = 0$)

ii. $\tilde{\varepsilon}(0)$: Dielektrizitätskonstante im engeren Sinn

$\tilde{\varepsilon}(0) = \operatorname{Re}\tilde{\varepsilon}(0) \geq 1$ für $\operatorname{Im}\tilde{\varepsilon}(\omega) \geq 0$ (nächster Abschnitt)

Dispersionsrelationen kommen in vielen Bereichen der Physik zur Anwendung, z.B. auch in der Quantenfeldtheorie: Kausalität $\rightarrow$ analytische Struktur von (Streu-)Amplituden $\rightarrow$ Dispersionsrelationen

4.19 Elektromagnetische Wellen in Medien

Voraussetzungen:

i. isotropes und homogenes Medium: ε, μ ortsunabhängig

ii. Zeit-, bzw. Frequenzabhängigkeit zugelassen: nicht zu große Frequenzen (Wellenlänge $\lambda \gg$ Mittelungsbereich notwendig)

iii. $\rho_{\text{frei}} = 0$, $\vec{j}_{\text{frei}} = 0$

Ansatz: monochromatische Welle ($\varepsilon(\omega)$, etc. jetzt ohne Tilde geschrieben)

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \operatorname{Re}\left\{\vec{\mathbb{E}}(\vec{x})\, e^{-i\omega t}\right\}, \qquad \vec{D}(t,\vec{x}) = \operatorname{Re}\left\{\varepsilon(\omega)\,\vec{\mathbb{E}}(\vec{x})\, e^{-i\omega t}\right\}$$

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \operatorname{Re}\left\{\vec{\mathbb{B}}(\vec{x})\, e^{-i\omega t}\right\}, \qquad \vec{H}(t,\vec{x}) = \operatorname{Re}\left\{\frac{\vec{\mathbb{B}}(\vec{x})}{\mu(\omega)}\, e^{-i\omega t}\right\}$$

ω reell vorausgesetzt (sonst exp. Anwachsen oder Abfall in der Zeit)
$\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ i. Allg. komplex (s. Oszillatormodell)

Maxwell-G. im Medium:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbb{D}}(t,\vec{x}) &= 0, \qquad & \vec{\nabla}\times\vec{\mathbb{E}}(t,\vec{x}) &= -\frac{1}{c}\,\dot{\vec{\mathbb{B}}}(t,\vec{x}) \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbb{B}}(t,\vec{x}) &= 0, \qquad & \vec{\nabla}\times\vec{\mathbb{H}}(t,\vec{x}) &= \frac{1}{c}\,\dot{\vec{\mathbb{D}}}(t,\vec{x}) \\
\vec{\mathbb{D}} &= \varepsilon\vec{\mathbb{E}}, \qquad & \vec{\mathbb{B}} &= \mu\vec{\mathbb{H}}
\end{aligned}$$

ε und μ räumlich und zeitlich konstant $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{E}}(\vec{x}) = 0 \,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{E}}(\vec{x}) - \frac{i\omega}{c}\,\vec{\mathbb{B}}(\vec{x}) = 0$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{B}}(\vec{x}) = 0, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{B}}(\vec{x}) + \frac{i\omega\varepsilon\mu}{c}\,\vec{\mathbb{E}}(\vec{x}) = 0$$

mit $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{B}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{B}}) - \Delta\vec{\mathbb{B}} = -\Delta\vec{\mathbb{B}}$ (analog für $\vec{\mathbb{E}}$ wegen $\rho_{\text{frei}} = 0$)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{E}}) - \frac{i\omega}{c}\,\vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{B}} = -\Delta\vec{\mathbb{E}} - \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\,\vec{\mathbb{E}} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\right)\vec{\mathbb{E}}(\vec{x}) = 0, \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2}\right)\vec{\mathbb{B}}(\vec{x}) = 0$$

Lösung durch ebene Wellen:

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \mathrm{Re}\left\{\vec{\mathbb{E}}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right\} \,, \qquad \vec{B}(t,\vec{x}) = \mathrm{Re}\left\{\vec{\mathbb{B}}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right\}$$

mit

$$\omega^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,\vec{k}^2 = \frac{c^2}{n^2}\,\vec{k}^2 = c^2\vec{k}_0^2 \,, \qquad \vec{k} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{k}_0$$

da ω und c reell, $\varepsilon\mu$ i. Allg. komplex $\rightarrow \vec{k}$ i. Allg. komplex (zur Vereinfachung: $\vec{k}_0$ reell)

Def.: **Brechungsindex** $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ (i. Allg. komplexe Funktion von ω)

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = n_r + i\kappa = |n|\, e^{i\delta}, \qquad \vec{k} = (n_r + i\kappa)\,\vec{k}_0$$

zusätzliche Konsequenzen der Maxwell-G. (völlig analog zum Vakuumfall)

$$\vec{k}_0 \cdot \vec{\mathbb{E}}_0 = 0, \qquad \vec{k}_0 \times \vec{\mathbb{E}}_0 = \frac{\omega}{cn}\,\vec{\mathbb{B}}_0$$
$$\vec{k}_0 \cdot \vec{\mathbb{B}}_0 = 0, \qquad \vec{k}_0 \times \vec{\mathbb{B}}_0 = -\frac{n\omega}{c}\,\vec{\mathbb{E}}_0$$

Folgerungen: wie im Vakuum $\vec{\mathbb{E}} \perp \vec{k}_0$, $\vec{\mathbb{B}} \perp \vec{k}_0$, $\vec{\mathbb{E}} \perp \vec{\mathbb{B}}$, aber $|\vec{\mathbb{E}}| \neq |\vec{\mathbb{B}}|$ (wenn $|n| \neq 1$)

Polarisation ebenfalls wie im Vakuum: i. Allg. elliptische Polarisation

betrachten Spezialfall der linearen Polarisation: $\vec{\mathbb{E}}_0 = \vec{E}_0$ reell

$$\begin{aligned}
\vec{E}(t,\vec{x}) &= \vec{E}_0\,\mathrm{Re}\left\{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\right\} = \vec{E}_0\,\cos\left(n_r\vec{k}_0\cdot\vec{x} - \omega t\right)e^{-\kappa\vec{k}_0\cdot\vec{x}} \\
\vec{\mathbb{B}}_0 &= n\frac{\vec{k}_0}{k_0} \times \vec{E}_0 = |n|\; e^{i\delta}\frac{\vec{k}_0}{k_0} \times \vec{E}_0 \\
\Rightarrow \quad \vec{B}(t,\vec{x}) &= |n|\,\frac{\vec{k}_0}{k_0} \times \vec{E}_0\,\cos\left(n_r\vec{k}_0\cdot\vec{x} - \omega t + \delta\right)e^{-\kappa\vec{k}_0\cdot\vec{x}}
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ gedämpfte ebene Wellen in Richtung $\vec{k}_0$; $\vec{B}$ zu $\vec{E}$ phasenverschoben

Phasengeschwindigkeit: Maximum der ebenen Welle bewegt sich mit Geschwindigkeit $v_P = \omega/(n_r k_0) = c/n_r$ in Richtung $\vec{k}_0$: $v_P(\omega)$ ist i. Allg. frequenzabhängig $\rightarrow$ Dispersion (siehe weiter unten)

Wellenlänge: $\quad n_r k_0 \lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = 2\pi/(n_r k_0) = \lambda_0/n_r$

wenn $\kappa > 0 \Rightarrow$ Dämpfung der Amplituden in Ausbreitungsrichtung $\vec{k}_0$

explizite Form im Oszillatormodell:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi n_0 q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}\ , \qquad \mu(\omega) = 1$$

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \quad \rightarrow \quad n^2 = \varepsilon\mu = n_r^2 - \kappa^2 + 2in_r\kappa\ , \qquad \mathrm{Im}\,\varepsilon = 2n_r\kappa$$

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon = \frac{4\pi n_0 q^2 \omega\Gamma/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}\ >\ 0$$

da $n_r > 0$ in allen realistischen Fällen (n_r: Brechungsindex im engeren Sinn) $\rightarrow$ tatsächlich Dämpfung in Richtung der Wellenausbreitung: $\kappa = \mathrm{Im}\,\varepsilon/2n_r > 0$

Einschub: **Energiebilanz**

wir hatten im Fall der mikroskopischen Elektrodynamik:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{S} + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0$$

benützen **jetzt** makroskopische Maxwell-Gleichungen und betrachten:

$$\begin{aligned}
\vec{j}_{\mathrm{frei}}\cdot\vec{E} &= \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\vec{H}\cdot\vec{E} - \frac{1}{4\pi}\dot{\vec{D}}\cdot\vec{E} \\
&= \frac{c}{4\pi}(\varepsilon_{ijk}\nabla_j H_k)E_i - \frac{1}{4\pi}\dot{\vec{D}}\cdot\vec{E} \\
&= \frac{c}{4\pi}\nabla_j(\varepsilon_{ijk}H_k E_i) - \frac{c}{4\pi}\varepsilon_{ijk}H_k\nabla_j E_i - \frac{1}{4\pi}\dot{\vec{D}}\cdot\vec{E} \\
&= \frac{c}{4\pi}\mathrm{div}(\vec{H}\times\vec{E}) + \frac{c}{4\pi}\vec{H}\cdot\underbrace{\mathrm{rot}\vec{E}}_{-\dot{\vec{B}}/c} - \frac{1}{4\pi}\dot{\vec{D}}\cdot\vec{E} \\
&= -\frac{c}{4\pi}\mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H}) - \frac{1}{4\pi}(\dot{\vec{D}}\cdot\vec{E} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{4\pi}(\dot{\vec{D}}\cdot\vec{E} + \vec{H}\cdot\dot{\vec{B}})}_{\frac{\partial\eta}{\partial t}:=} + \mathrm{div}\left(\underbrace{\frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}}_{\vec{S}:=}\right) + \vec{j}_{\mathrm{frei}}\cdot\vec{E}$$

im Fall von konstantem ε, μ: $\eta = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}) = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon\vec{E}^2 + \vec{B}^2/\mu)$

in unserem Fall: exponentielle Abnahme der Energiedichte

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu}\right) \sim e^{-2\kappa k_0 \frac{\vec{k}_0\cdot\vec{x}}{k_0}}$$

Absorptionskoeffizient $= 2\kappa k_0 = k_0\,\mathrm{Im}\,\varepsilon/n_r \to$ Intensität der Welle fällt auf einer **Absorptionslänge** $l_A = 1/(2\kappa k_0)$ auf e-ten Teil ab

Energieverlust: Strahlung, Streuung an Atomen, Erwärmung des Mediums, etc.

weitere Konsequenz der Dämpfung: **Phasenverschiebung** $\delta = \arctan\kappa/n_r$ und

$$|\vec{B}(t+\frac{\delta}{\omega},\vec{x})| = |n|\,|\vec{E}(t,\vec{x})|\ , \qquad |n| \neq 1 \ \text{ i.Allg.}$$

typische Frequenzabhängigkeit von $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ im Oszillatormodell:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\omega) &= 1 + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}, \quad a = 4\pi n_0 q^2/m > 0\ ,\ \mu = 1\ ,\ n^2 = \varepsilon(\omega)\\ \mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) &= 1 + \frac{a(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}\end{aligned}$$

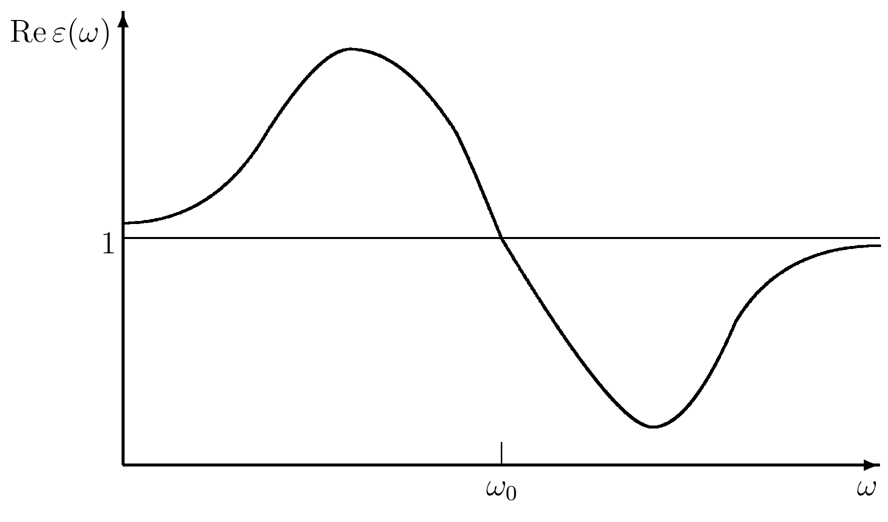


Abbildung 4.32: Schematischer Verlauf von $\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega)$ im Oszillatormodel

$\operatorname{Im}\varepsilon(\omega) = \dfrac{a\omega\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}$

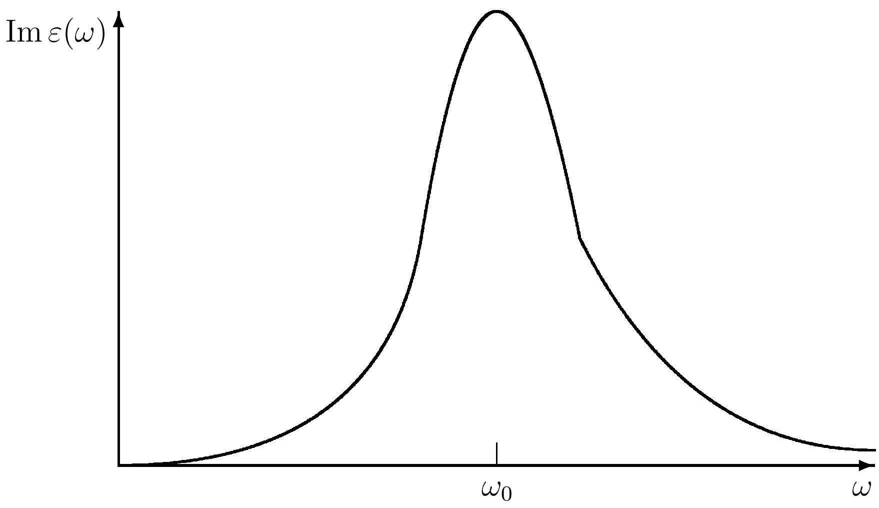


Abbildung 4.33: Schematischer Verlauf von $\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$ im Oszillatormodel

ähnlicher Verlauf für Brechungsindex $n_r(\omega) \sim \sqrt{\operatorname{Re}\varepsilon(\omega)}$ (bei kleiner Dämpfung) und für $\kappa(\omega) = \dfrac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)}{2n_r(\omega)}$

bei kleiner Dämpfung:

$$n^2 = \varepsilon\mu = n_r^2 - \kappa^2 + 2in_r\kappa \qquad \longrightarrow \qquad 2n_r\frac{dn_r}{d\omega} \simeq \frac{d\operatorname{Re}\varepsilon(\omega)}{d\omega}$$

man unterscheidet daher

normale Dispersion	**anomale Dispersion**
$\dfrac{dn_r}{d\omega} > 0$	$\dfrac{dn_r}{d\omega} < 0$
wenig Absorption	starke Absorption
weit weg von Resonanz	Nähe einer Resonanz

Dispersion

beschränken uns auf normale Dispersion ($\kappa \simeq 0$) $\rightarrow n$, $\vec{k} = n\,\vec{k}_0$ annähernd reell $\rightarrow$ ebene Wellen fast wie im Vakuum

allerdings: $\omega(k)$ i. Allg. nicht mehr linear in k, da

$$\omega^2 = \frac{c^2k^2}{n^2(\omega(k))}$$

Bem.: $n \simeq n_r$ im weiteren nicht unterschieden

physikalisch realisierbar sind **Wellenpakete**

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \int d^3k\, \tilde{\vec{E}}(\vec{k})\, e^{i\left[\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(k)t\right]}$$

zur Vereinfachung Beschränkung auf eine Raumdimension (f: Komponente von $\vec{E}$, $\vec{B}$)

$$f(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k) e^{i[kx-\omega(k)t]}$$

verschiedene Wellenzahlen $\to$ verschiedene Phasengeschwindigkeiten $v_P(k) = \omega(k)/k$

betrachten jetzt ein fast monochromatisches Wellenpaket:

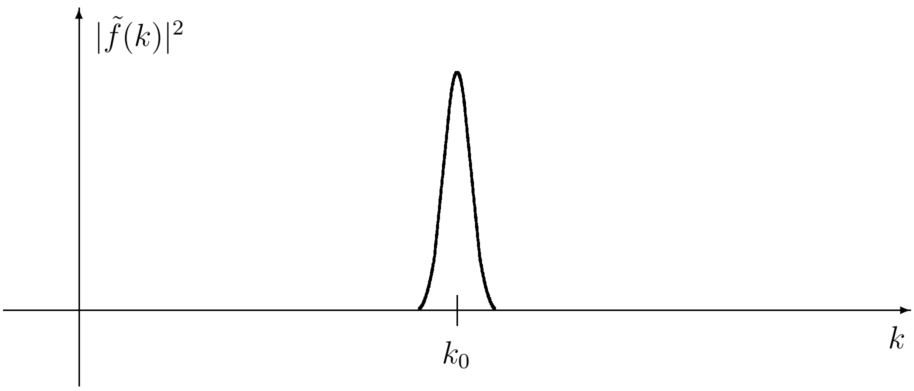


Abbildung 4.34: Spektrum eines fast monochromatischen Wellenpakets

Spektrum der Welle: $|\tilde{f}(k)|^2 \to$ entwickeln $\omega(k)$ um k_0, wo Spektrum ausgeprägtes Maximum hat:

$$\begin{aligned}
\omega(k) &= \omega(k_0) + \underbrace{\left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right|_{k=k_0}}_{v_G}(k-k_0) + O\left[(k-k_0)^2\right] \\
f(t,x) &\simeq \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k) e^{i[kx-\omega(k_0)t-v_G(k-k_0)t]} \\
&= e^{it[v_G k_0-\omega(k_0)]} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k)\, e^{ik(x-v_G t)} \\
&= e^{it[v_G k_0-\omega(k_0)]} f(0, x-v_G t)
\end{aligned}$$

Folgerung: $|f(t,x)| = |f(0, x - v_G t)|$, wenn höhere Terme in Entwicklung von $\omega(k)$ um k_0 vernachlässigbar $\rightarrow$ Welle pflanzt sich fort mit **Gruppengeschwindigkeit**

$$v_G = \left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right|_{k=k_0}$$

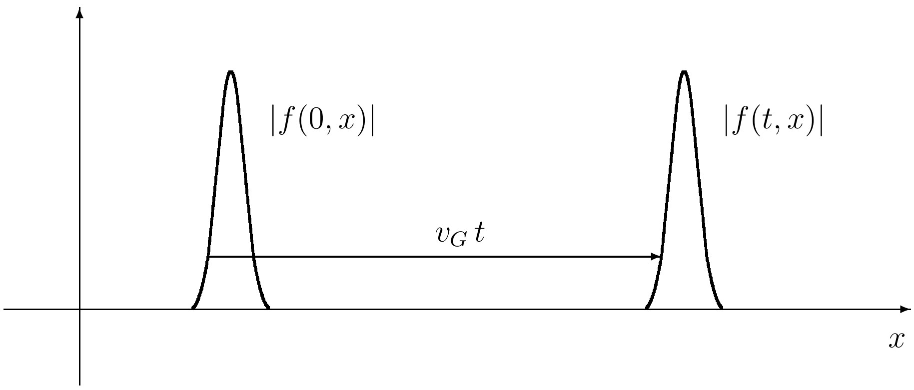


Abbildung 4.35: Räumliche Verschiebung des Wellenpakets mit Gruppengeschwindigkeit v_G

Elektrodynamik:

Vakuum: $\varepsilon\mu = 1 \rightarrow \omega(k) = kc \rightarrow v_G = d\omega(k)/dk = c = v_P$

Wellenleiter (ähnlich für Plasmawellen): andere Dispersionsrelation

$$\omega(k) = \sqrt{\omega_{\min}^2 + c^2k^2} \quad \longrightarrow \quad v_P = \frac{\omega(k)}{k} = c\sqrt{1 + \frac{\omega_{\min}^2}{c^2k^2}} \; > \; c$$

$$\longrightarrow \quad v_G = \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{c^2k}{\sqrt{\omega_{\min}^2 + c^2k^2}} = c\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega_{\min}^2}{c^2k^2}}} \; < \; c$$

interessante Frage: gilt immer $v_G \leq c$?

Wellen im Medium:

$$\omega(k) = \frac{kc}{n(\omega)} \qquad \longrightarrow \qquad v_P = \frac{c}{n}$$

leiten die Gleichung $n(\omega)\omega = ck$ nach k ab

$$\frac{dn}{d\omega}\frac{d\omega}{dk}\omega + n\frac{d\omega}{dk} = c \quad \longrightarrow \quad v_G = \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{c}{n + \omega\dfrac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n\left[1 + \dfrac{\omega}{n}\dfrac{dn}{d\omega}\right]}$$

normale Dispersion: $dn/d\omega > 0\,,\, n > 1 \to v_G < v_P < c$

anomale Dispersion: $\mathrm{Im}\, n$ nicht vernachlässigbar $\to$ v_G keine aussagekräftige Größe

Gruppengeschwindigkeit v_G: bei Spektrum mit scharfem Maximum Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Zentrums des Wellenpakets

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sind zu unterscheiden von der **Frontgeschwindigkeit** (Signalgeschwindigkeit) eines im Ortsraum lokalisierten Wellenpakets

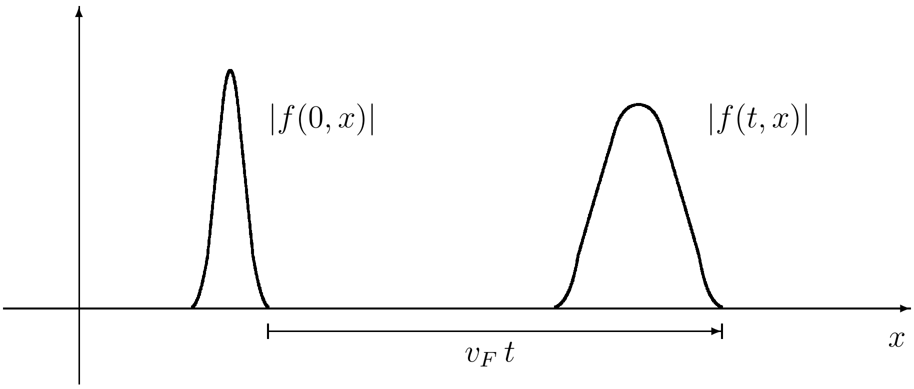


Abbildung 4.36: Frontgeschwindigkeit v_F

Theorie der Fouriertransformation: $v_F = \lim\limits_{k\to\infty} \omega(k)/k$

Hochfrequenzlimes: Mittelung der Kontinuumselektrodynamik nicht mehr sinnvoll $\to$ Hochfrequenzwelle „sieht“ körnige (atomare) Struktur; zwischen den Atomen ist aber Vakuum $\to$ $v_F = c$ (Plausibilitätsargument, kein Beweis)

tatsächlich erfordern hohe Frequenzen Behandlung mit Quantenfeldtheorie: relativistische QFT $\to$ $v_F = c$ (Kausalität)

eigentliche Bedeutung der **Dispersion = Zerfließen von Wellenpaketen**

in der Näherung $\omega(k) \simeq \omega(k_0) + v_G(k - k_0) \to v_G \simeq v_P$

wenn $v_G \neq v_P$: Wellenpaket zerfließt, weil verschiedene Fourierkomponenten verschiedene Phasengeschwindigkeiten haben $\to$ offenbar höhere Terme in der Entwicklung von $\omega(k)$ ausschlaggebend

einfaches Modell: Gaußsches Wellenpaket mit quadratischem Term in $\omega(k)$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{b}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-b^2(k-k_0)^2/2} \\
\omega(k) &= \omega_0 \left(1 + \frac{a^2k^2}{2}\right) \qquad \longrightarrow \qquad v_G = \left.\frac{d\omega(k)}{dk}\right|_{k_0} = a^2\omega_0 k_0
\end{aligned}$$

Konstante a, b: Längen, die Wellenpaket und Dispersion charakterisieren

$$\begin{aligned} f(t,x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{f}(k) e^{i[kx-\omega(k)t]} \\ &= \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-b^2(k-k_0)^2/2}\, e^{i\left[kx-\omega_0 t\left(1+a^2k^2/2\right)\right]} \end{aligned}$$

Nebenrechnung für Exponenten:

$$\begin{aligned} g(t,x,k) &= -\frac{b^2}{2}(k-k_0)^2 + ikx - i\omega_0 t - i\omega_0 t \frac{a^2k^2}{2} \\ &= -\frac{b^2}{2}\, d(t)^2 (k-k_0)^2 + ik(x - v_G t) - i\omega_0 t \left(1 - \frac{a^2k_0^2}{2}\right) \\ &= -\frac{b^2}{2}\, d(t)^2 (k-k_0)^2 + i(k-k_0)(x-v_G t) + ik_0 x - i\omega(k_0) t \end{aligned}$$

mit

$$d(t)^2 = 1 + \frac{i\omega_0 a^2}{b^2}\, t\ , \qquad v_G = a^2\omega_0 k_0$$

mit neuer Integrationsvariable $k' = k - k_0$ und dem Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-L^2k^2/2} e^{ikz} = \frac{1}{L}\, e^{-z^2/2L^2}$$

ergibt sich als explizite Form des Wellenpakets

$$f(t,x) = \frac{e^{i[k_0x-\omega(k_0)t]}}{d(t)}\, e^{-(x-v_Gt)^2/2b^2d(t)^2}$$

$$t = 0: \quad |f(0,x)| = e^{-x^2/2b^2}$$

$$t > 0: \quad |f(t,x)| = \frac{e^{-(x-v_Gt)^2/2b^2|d(t)|^4}}{|d(t)|}$$

Interpretation der Zeitabhängigkeit: Maximum des Wellenpakets bewegt sich mit Gruppengeschwindigkeit v_G

Breite

$$\sim\ b|d(t)|^2 = b\left(1 + \omega_0^2 t^2 \frac{a^4}{b^4}\right)^{1/2}$$

wächst mit t

Breite wächst umso rascher, je kleiner $b/a \to$ schmälere Wellenpakete zerfließen rascher (Maximum wird dabei kleiner mit wachsendem t)

Grund: klassische Unschärferelation $\quad \Delta x\, \Delta k \gtrsim 1$

$\to$ kleines $b \quad \leftrightarrow \quad$ breites Spektrum $|\tilde{f}(k)|^2$

$\to$ größerer Bereich von verschiedenen Phasengeschwindigkeiten

4.20 Reflexion und Brechung

experimentelle Situation: 2 verschiedene Medien I, II mit Brechungsindizes $n_I = \sqrt{\varepsilon_I}$ $(\mu_I = 1)$, $n_{II} = \sqrt{\varepsilon_{II}}$, $(\mu_{II} = 1)$

Voraussetzung: Medien durch (x,y)-Ebene getrennt, n_I reell, $n_{II} = n_{II,r} + i\kappa_{II}$, einfallende elektromagnetische Welle in I fällt auf Trennfläche

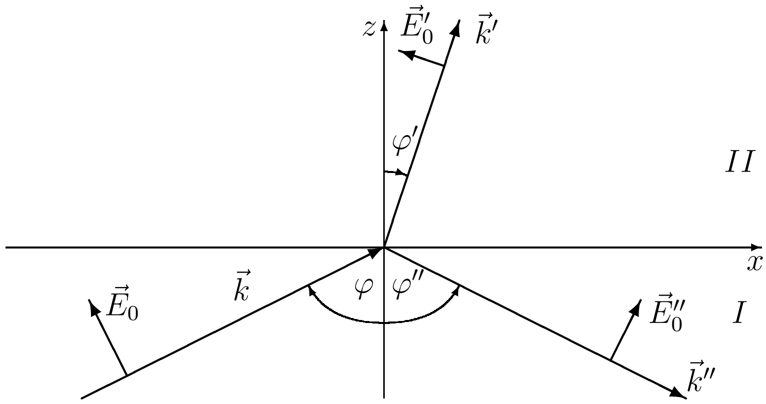


Abbildung 4.37: Reflexion und Brechung an der Grenze zweier Medien

einfallende Welle ($z \leq 0$, komplexe Notation):

$$\mathbb{E}(t, \vec{x}) = \mathbb{E}_0\, e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \mathbb{B} = \vec{k} \times \mathbb{E}/k_0, \quad \vec{k} = n_I \vec{k}_0, \quad \vec{k} \cdot \mathbb{E}_0 = 0$$

Randbedingung: an Grenzfläche $\rho_{\text{frei}} = 0$, $\vec{j}_{\text{frei}} = 0$

Bemerkung: Zeichnung nur für **reelle** $\vec{E}_0$, $\vec{E}_0'$, $\vec{E}_0''$, n_{II} sinnvoll

Randbedingung an die Felder: Tangentialkomponenten von $\vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}$ (wegen $\mu = 1$) stetig bei $z = 0$, Normalkomponenten von $\vec{D}$, $\vec{B}$ stetig bei $z = 0$

$\to$ muss i. Allg. auch eine Welle in II geben: **gebrochene Welle**

$$\mathbb{E}'(t, \vec{x}) = \mathbb{E}_0'\, e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega' t)}, \qquad \mathbb{B}' = \vec{k}' \times \mathbb{E}'/k_0' \qquad (z \geq 0)$$

damit sind die Randbedingungen i. Allg. noch nicht zu erfüllen

$\rightarrow$ es gibt i. Allg. auch eine **reflektierte Welle**

$$\mathbb{E}''(t,\vec{x}) = \mathbb{E}_0'' \, e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t)} \,, \qquad \vec{\mathbb{B}}'' = \vec{k}'' \times \mathbb{E}''/k_0'' \qquad (z \leq 0)$$

dabei gilt natürlich $\vec{k}^2/n_I^2 = k_0^2 = \omega^2/c^2$, etc.

beginnen mit Tangentialkomponenten von $\vec{E}$

$$z = 0: \qquad \vec{e}_z \times \left[\mathbb{E}_0 \, e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + \mathbb{E}_0'' \, e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x} - \omega'' t)} \right] = \vec{e}_z \times \mathbb{E}_0' \, e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x} - \omega' t)}$$

muss für alle Zeiten gelten $\rightarrow \omega = \omega' = \omega''$

$$\rightarrow \quad \frac{k^2}{n_I^2} = \frac{k''^2}{n_I^2} = \frac{k'^2}{n_{II}^2} = \frac{\omega^2}{c^2} = k_0^2 \quad \rightarrow \quad k = k'' \quad (\vec{k}, \vec{k}'' \text{ reell})$$

legen $\vec{k}$ in die (x,z)-Ebene: $\mathbb{E} \propto e^{i(k_1 x + k_3 z - \omega t)}$

Randbedingung $(z = 0)$ $\forall\, y \rightarrow k_2' = k_2'' = 0 \rightarrow \vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$ liegen in einer Ebene $\forall\, x$ $(z = 0) \rightarrow k_1 = k_1' = k_1''$

$$\sin\varphi = \frac{k_1}{k}, \quad \sin\varphi'' = \frac{k_1''}{k''} = \frac{k_1}{k} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{\textbf{Reflexionsgesetz} \text{ (Einfallswinkel=Ausfallswinkel):} \quad \varphi = \varphi''}$$

Voraussetzung: $\kappa_{II} \ll n_{II,r} \rightarrow$ schwach gedämpfte Welle in II

$$e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} = e^{i \,\mathrm{Re}\, \vec{k}' \cdot \vec{x}} \, e^{-\mathrm{Im}\, \vec{k}' \cdot \vec{x}}$$

$\rightarrow \mathrm{Re}\, \vec{k}'$ definiert Richtung der gebrochenen Welle $\rightarrow$

$$\sin\varphi' = \frac{k_1'}{|\mathrm{Re}\, \vec{k}'|} = \frac{k_1}{|\mathrm{Re}\, (\vec{k}_0' \, n_{II})|} = \frac{k_1}{k_0 |\mathrm{Re}\, (n_{II,r} + i\kappa_{II})|} = \frac{k_0 n_I \sin\varphi}{k_0 n_{II,r}}$$

$$\boxed{\textbf{Brechungsgesetz}: \quad n_I \sin\varphi = n_{II,r} \sin\varphi'}$$

(Snellsches[4] Gesetz)

damit sind Exponentialfaktoren in allen Wellen gleich (für $z = 0$)

[4]Willebrord Snell (1580-1626)

verbleibende Randbedingungen setzen $\vec{\mathbb{E}}_0$, $\vec{\mathbb{E}}_0'$, $\vec{\mathbb{E}}_0''$ (i. Allg. komplex) in Beziehung zueinander

Normalkomponenten von $\vec{D}$, $\vec{B}$

i. $$\varepsilon_I(\vec{\mathbb{E}}_0 + \vec{\mathbb{E}}_0'') \cdot \vec{e}_z = \varepsilon_{II}\vec{\mathbb{E}}_0' \cdot \vec{e}_z$$

ii. $$\left(\vec{k} \times \vec{\mathbb{E}}_0 + \vec{k}'' \times \vec{\mathbb{E}}_0''\right) \cdot \vec{e}_z = \left(\vec{k}' \times \vec{\mathbb{E}}_0'\right) \cdot \vec{e}_z$$

Tangentialkomponenten von $\vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}$

iii. $$(\vec{\mathbb{E}}_0 + \vec{\mathbb{E}}_0'') \times \vec{e}_z = \vec{\mathbb{E}}_0' \times \vec{e}_z$$

iv. $$\left(\vec{k} \times \vec{\mathbb{E}}_0 + \vec{k}'' \times \vec{\mathbb{E}}_0''\right) \times \vec{e}_z = \left(\vec{k}' \times \vec{\mathbb{E}}_0'\right) \times \vec{e}_z$$

beliebige einfallende Welle ist Überlagerung von zwei aufeinander orthogonalen linear polarisierten Wellen; beschränken uns hier auf den Fall, dass $\vec{\mathbb{E}}_0$ in der Einfallsebene liegt, d.h. $\vec{\mathbb{E}}_0 \cdot \vec{e}_y = 0$

Randbedingung $\rightarrow$ $\vec{\mathbb{E}}_0$, $\vec{\mathbb{E}}_0'$, $\vec{\mathbb{E}}_0''$ alle in Einfallsebene

Bemerkung: $E_0 = \sqrt{\vec{\mathbb{E}}_0^2}$, $E_0'' = \sqrt{\vec{\mathbb{E}}_0''^2}$, $\varepsilon_I = n_I^2$ alle reell; $E_0' = \sqrt{\vec{\mathbb{E}}_0'^2}$, $\varepsilon_{II} = n_{II}^2$ i. Allg. komplex

$$\text{i} \quad \rightarrow \quad n_I^2\,(E_0 + E_0'')\sin\varphi = n_{II}^2 E_0' \sin\overline{\varphi}'$$

dabei ist die i. Allg. (für $\kappa_{II} \neq 0$) komplexe Größe $\sin\overline{\varphi}'$ def. durch

$$k_1' = k' \sin\overline{\varphi}' \qquad\qquad (k_1' \text{ reell, } k' \text{ komplex})$$

Relation ii ist identisch erfüllt, da $\vec{k} \times \vec{\mathbb{E}} \propto \vec{e}_y$

$$\text{iii} \quad \rightarrow \quad (E_0 - E_0'')\cos\varphi = E_0' \cos\overline{\varphi}' \;, \qquad \sin^2\overline{\varphi}' + \cos^2\overline{\varphi}' = 1$$

iv: da $\vec{k} \times \vec{\mathbb{E}} \propto \vec{e}_y$ $\quad\rightarrow\quad$ resultierender Vektor in x-Richtung

da $\vec{k} \cdot \vec{\mathbb{E}} = 0$ $\quad\rightarrow\quad$ Produkt der Beträge $k\,E$ geht ein; mit

$$k^2/k_0^2 = k''^2/k_0^2 = n_I^2, \quad k'^2/k_0^2 = n_{II}^2 \quad \rightarrow \quad n_I\,(E_0 + E_0'') = n_{II} E_0'$$

i + iv $\quad\rightarrow\quad$ allg. Form des Brechungsgesetzes für komplexes n_{II}

$$n_I \sin\varphi = n_{II} \sin\overline{\varphi}'$$

iii + iv: 2 Gleichungen für E_0', E_0'' ($\overline{\varphi}'$ mit Hilfe des Brechungsgesetzes eliminiert)

Fresnelsche[5] Formeln (für $\vec{E}_0$ in Einfallsebene)

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n_I n_{II}\cos\varphi}{n_{II}^2\cos\varphi + n_I\sqrt{n_{II}^2 - n_I^2\sin^2\varphi}}\ , \qquad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n_{II}^2\cos\varphi - n_I\sqrt{n_{II}^2 - n_I^2\sin^2\varphi}}{n_{II}^2\cos\varphi + n_I\sqrt{n_{II}^2 - n_I^2\sin^2\varphi}}$$

i. Allg. komplexe Größen; wenn n_{II} komplex: $\sqrt{n_{II}^2 - n_I^2\sin^2\varphi} = n_{II}\cos\overline{\varphi}'$

zeitgemittelte Energiestromdichte:

$$\begin{aligned} <\vec{S}> &= \frac{c}{4\pi} <\vec{E}\times\vec{H}> = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(\vec{\mathbb{E}}_0\times\vec{\mathbb{H}}_0^*\right) \overset{\mu=1}{=} \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(\vec{\mathbb{E}}_0\times\vec{\mathbb{B}}_0^*\right) \\ &= \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left\{\vec{\mathbb{E}}_0\times\left(\frac{n}{k_0}\vec{k}_0\times\vec{\mathbb{E}}_0\right)^*\right\} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left\{n\frac{\vec{k}_0}{k_0}\vec{\mathbb{E}}_0\cdot\vec{\mathbb{E}}_0^*\right\} \\ &= \frac{c}{8\pi}|E_0|^2\frac{\vec{k}_0}{k_0}\,\mathrm{Re}\,n \end{aligned}$$

Reflexionskoeffizient $R_{||}$ (für $\vec{E}$ in Einfallsebene)

$$R_{||} = \frac{|<\vec{S}''>|}{|<\vec{S}>|} = \frac{|E_0''|^2}{|E_0|^2} \overset{\varphi=0}{=} \frac{|n_{II}-n_I|^2}{|n_{II}+n_I|^2} = \frac{(n_{II,r}-n_I)^2+\kappa_{II}^2}{(n_{II,r}+n_I)^2+\kappa_{II}^2}$$

Transmissionskoeffizient $T_{||}$

$$T_{||} = \frac{|<\vec{S}'>|}{|<\vec{S}>|} = \frac{|E_0'|^2\mathrm{Re}\,n_{II}}{|E_0|^2 n_I} \overset{\varphi=0}{=} \frac{4n_I\mathrm{Re}\,n_{II}}{|n_{II}+n_I|^2} = \frac{4n_I n_{II,r}}{(n_{II,r}+n_I)^2+\kappa_{II}^2}$$

Energieerhaltung: $R_{||} + T_{||} = 1$

für sichtbares Licht: Medium I = Luft, $n_I \simeq 1$

Wasser: $n_{II,r} \simeq 1.33$, $\kappa_{II} \ll n_{II,r} \to R_{||} \simeq 0.02 \to$ Wasser ist transparent: $T_{||} \simeq 0.98$

Metall: $n_{II} \simeq i\kappa_{II} \to T_{||} \simeq 0 \to R_{||} \simeq 1$ (Metallspiegel!)

im weiteren angenommen: n_{II} **reell**

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n_I\cos\varphi}{n_{II}\cos\varphi + n_I\cos\varphi'}\ , \qquad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n_{II}\cos\varphi - n_I\cos\varphi'}{n_{II}\cos\varphi + n_I\cos\varphi'}$$

Folgerung: $E_0'' = 0$ für $n_{II}\cos\varphi_B = n_I\cos\varphi'$, zusammen mit Brechungsgesetz $n_I\sin\varphi_B = n_{II}\sin\varphi'$ kann φ' eliminiert werden $\to$

$$\tan\varphi_B = \frac{n_{II}}{n_I} \quad\to\quad \tan\varphi' = \frac{n_I}{n_{II}} = \cot\varphi_B \quad\to\quad \varphi_B + \varphi' = \frac{\pi}{2}$$

[5] Augustin Jean Fresnel (1788-1827)

φ_B: **Brewsterscher**[6] **Winkel**, bei $\varphi = \varphi_B$: kein reflektierter Strahl wenn $\vec{E}$ in Einfallsebene $\rightarrow$ bei einfallender unpolarisierter Strahlung ist reflektierte Welle vollständig polarisiert mit $\vec{E}'' \perp$ Ebene $\rightarrow$ Herstellung von polarisiertem Licht (orth. polar. Komp. immer $\neq 0$)

Symmetrierelation für allgemeine Winkel:

$|E_0''|/|E_0|$ ungeändert bei $\varphi \leftrightarrow \varphi'$ und $n_I \leftrightarrow n_{II}$ $\rightarrow$ Reflexionskoeffizient gleich groß für Wellen, die von I nach II unter Winkel φ einfallen wie für Wellen, die von II nach I unter Winkel φ' einfallen, wobei $n_I \sin\varphi = n_{II} \sin\varphi'$

Totalreflexion Einfall vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium: $n_{II} < n_I$ (beide reell)

$$\sin\varphi = \frac{n_{II}}{n_I}\sin\varphi' \leq \frac{n_{II}}{n_I} < 1 \quad \rightarrow \quad \varphi \leq \varphi_{\mathrm{TR}} = \arcsin\frac{n_{II}}{n_I}$$

$\rightarrow$ Totalreflexion für $\varphi > \varphi_{\mathrm{TR}}$

Anwendungen: Glasfaser als Lichtleiter, Röntgenlinsen

[6] Sir David Brewster (1781-1868)