

Übungen zu T3, WS 2017

Hinweis: Die numerischen Werte der benötigten physikalischen Konstanten finden Sie unter pdg.lbl.gov → Reviews, Tables, Plots → Constants, Units, Atomic and Nuclear Properties → Physical Constants

1. Berechnen Sie das Verhältnis der Coulombkraft $|\vec{F}_C|$ und der Gravitationskraft $|\vec{F}_G|$ zwischen zwei Protonen, zwei Elektronen sowie einem Proton und einem Positron.
2. Wie groß müsste eine hypothetische Protonmasse m_h sein, damit die Gravitationskraft zwischen zwei solchen Protonen betragsmäßig gleich ihrer Coulombkraft ist? Wie groß ist das Verhältnis m_h/m_p , wenn m_p die wirkliche Protonmasse ist?
3. Zwei als Punktteilchen idealisierte Menschen mit je 50 kg Protonen befinden sich in einem Abstand von einem Meter. Ihre Protonladungen seien zu je 99% durch Elektronen abgesättigt. Berechnen Sie die Coulombabstoßung der beiden Menschen und vergleichen Sie diese Kraft mit dem „Gewicht“ der Erde $M_{\oplus}g$ ($M_{\oplus} \simeq 6 \times 10^{24}$ kg, $g \simeq 10 \text{ ms}^{-2}$).
4. Der total antisymmetrische Epsilon-Tensor (in drei Dimensionen) ist definiert durch

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i, j, k \text{ eine gerade Permutation von } 1, 2, 3 \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } i, j, k \text{ eine ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Drücken Sie die folgenden Ausdrücke durch Produkte von Kronecker-Deltas aus (Summenkonvention beachten!):

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk}, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk}.$$

Hinweis: Schreiben Sie den Epsilon-Tensor in der Form $\varepsilon_{ijk} = \det(e_i, e_j, e_k)$, wobei

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die übliche Standardbasis des \mathbb{R}^3 ist. Verwenden Sie weiters $\det A^T = \det A$ und $\det(AB) = \det A \det B$.

5. Drücken Sie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$ durch Skalarprodukte aus.

Hinweis: Verwenden Sie eines der Resultate des vorigen Beispiels.

6. Welche der folgenden Ausdrücke sind sinnvoll, welche nicht?

div rot, rot div, div grad, grad div, grad rot, rot grad, grad grad, div div, rot rot.

7. Zeigen Sie die folgenden Beziehungen, wenn $\phi(\vec{x})$ ein hinreichend oft differenzierbares Skalarfeld ist (Indexschreibweise und Summenkonvention verwenden!):

$$\text{rot grad } \phi = 0, \quad \text{div grad } \phi = \Delta \phi.$$

8. Zeigen Sie die folgenden Beziehungen, wenn $\vec{A}(\vec{x})$ ein hinreichend oft differenzierbares Vektorfeld ist (Indexschreibweise und Summenkonvention verwenden!):

$$\text{div rot } \vec{A} = 0, \quad \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}.$$

9. $\vec{u}(\vec{x})$ und $\vec{v}(\vec{x})$ seien Vektorfelder, $\phi(\vec{x})$ ein skalares Feld, alle hinreichend oft differenzierbar. Beweisen Sie die folgenden Formeln (Indexschreibweise und Summenkonvention verwenden!):

$$\text{rot}(\phi \vec{v}) = \text{grad } \phi \times \vec{v} + \phi \text{rot } \vec{v}, \quad \text{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{u} - \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{v}.$$

10. $r := |\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2} = \sqrt{x_k x_k}$, $n_i := x_i/r$ ($r \neq 0$). $f(r)$ sei eine hinreichend oft differenzierbare Funktion. Berechnen Sie:

$$\nabla_i r, \quad \nabla_i f(r), \quad \nabla_i n_j, \quad \nabla_i \nabla_j f(r), \quad \text{rot}(f(r)\vec{x}).$$

11. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke (Summenkonvention beachten und Indexnotation verwenden!):

$$\Delta r^2 = \nabla_i \nabla_i r^2, \quad \nabla_i \sin(\vec{k} \cdot \vec{x}), \quad \nabla_i (x_i x_k), \quad \text{div } \vec{x}.$$

Bemerkung: In der zweiten Aufgabe bezeichnet \vec{k} einen konstanten Vektor.

12. Zeigen Sie mit Hilfe des Geschwindigkeitsadditionstheorems, dass sich ein Teilchen, das sich in einem Inertialsystem S mit Lichtgeschwindigkeit c bewegt, auch in jedem anderen System S' die Geschwindigkeit c hat.

13. Eine Lorentztransformationsmatrix L ist durch die Eigenschaft $L^T g L = g$ charakterisiert. Zeigen Sie, dass die Menge \mathcal{L} aller Lorentztransformationen eine Gruppe bildet (Gruppenmultiplikation = Matrixmultiplikation).

14. Die Poincarégruppe \mathcal{P} besteht aus allen Elementen der Form (L, a) mit $L \in \mathcal{L}$ und einem Vierervektor a . Zeigen Sie, dass \mathcal{P} mit dem Verknüpfungsgesetz

$$(L', a')(L, a) = (L'L, L'a + a')$$

eine Gruppe bildet. Erklären Sie den physikalischen Ursprung des Verknüpfungsgesetzes.

15. Zeigen Sie, dass

$$L(\vec{\alpha}, \vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & D(\vec{\alpha}) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad D(\vec{\alpha}) \in \text{SO}(3)$$

ein Element aus \mathcal{L}_+^\uparrow ist.

16. Zeigen Sie, dass

$$L(\vec{0}, \vec{V}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{V}^T / c \\ -\gamma \vec{V} / c & \mathbb{1}_3 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \vec{V} \vec{V}^T / c^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{V}^2 / c^2}}$$

ein Element aus \mathcal{L}_+^\uparrow ist.

17. Berechnen Sie $L(\vec{\alpha}, \vec{V}) := L(\vec{\alpha}, \vec{0})L(\vec{0}, \vec{V})$ und $L(\vec{0}, \vec{V})L(\vec{\alpha}, \vec{0})$ und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse. Unter welchen Umständen stimmen die beiden Ausdrücke überein?

18. Diskutieren Sie das Transformationsverhalten von Energie und Impuls bei unserer Standard-Lorentztransformation. Was ergibt sich für ein Teilchen, das im System S ruht?

19. Die maximalen Energien von e^- (bzw. e^+) bei LEP (CERN) betragen etwa 100 GeV. Berechnen Sie die dazugehörige Geschwindigkeit des Elektrons (bzw. des Positrons) in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit. Da e^+ und e^- mit entgegengesetzten Impulsen aufeinander geschossen wurden, betrug die Gesamtenergie zweimal 100 GeV. Wie groß müsste die Energie des Positrons sein, wenn man das Experiment mit einem ruhenden Elektron durchführen würde (fixed target setup)?

Hinweis: Die relevante Größe ist die **Invariante** $(p_1 + p_2)^2$, welche aus den 4-Impulsen $p_{1,2}$ der beiden kollidierenden Teilchen gebildet wird.

20. Behandeln Sie in Analogie zum vorigen Beispiel den Fall der Protonen des LHC in dessen Endausbaustufe (2×7 TeV).
21. Betrachten Sie die Zerfälle $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ und $\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e$ im Ruhesystem des Pions. Wie groß sind Energien und Geschwindigkeiten von μ^+ , ν_μ und e^+ , ν_e ? ($m_\nu \simeq 0$.)

Hinweis: Die Erhaltung von Energie und Impuls führt auf eine Gleichung $P = p_1 + p_2$ für Vierervektoren. Bilden Sie das Viererquadrat der Gleichung in der Form $P - p_1 = p_2$ und spezialisieren Sie dann auf das Ruhesystem des Pions.

22. Untersuchen Sie die Kinematik der Compton-Streuung, das heißt der Streuung eines Photons an einem Elektron ($e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$). Der Energie-Impulsvektor des masselosen Photons hat die Form

$$p^\mu = (E/c, \vec{p}) = (|\vec{p}|, \vec{p}).$$

Den Zusammenhang zwischen p^μ und der Frequenz (bzw. Wellenlänge) des Lichtquants liefert die de Broglie-Beziehung

$$p^\mu = \hbar k^\mu, \quad k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$$

Der Wellenzahlvektor \vec{k} hat den Betrag $2\pi/\lambda$. Sind die Viererimpulse des Photons bzw. des Elektrons vor und nach der Streuung p und p' , bzw. q und q' , so verlangt die Energie-Impuls-Erhaltung

$$p + q = p' + q'.$$

Um die Energieänderung des Photons bei der Streuung zu berechnen, eliminieren Sie q' aus der obigen Gleichung, indem Sie $q' = p + q - p'$ quadrieren. Spezialisieren Sie dann auf das Ruhesystem des Elektrons und geben Sie die Differenz der Wellenlängen $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ in Abhängigkeit des Winkels θ an. θ ist dabei der Winkel zwischen der Richtung des einfallenden und des gestreuten Photons.

23. $S(x)$ sei ein Skalarfeld. In der Vorlesung wurde mit Hilfe des Quotiententheorems gezeigt, dass sich

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} S(x)$$

wie ein **kovariantes** Vektorfeld transformiert. Verifizieren Sie dieses Resultat durch die **direkte** Ermittlung des Transformationsverhaltens des Ausdrucks bei einer Poincarétransformation.

24. Zeigen Sie:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}} = q\vec{v} \cdot \vec{E}.$$

25. Zeigen Sie, dass sich die Lagrangefunktion

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} - q\phi(t, \vec{x}) + q\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}(t, \vec{x})$$

bei einer Eichtransformation nur um eine totale Zeitableitung ändert.

26. Behandeln Sie die relativistische Bewegung eines Punktteilchens mit Masse m und Ladung q in einem statischen homogenen äußeren rein elektrischen Feld $\vec{E} = E\vec{e}_1$ für **beliebige** Anfangsbedingungen. Hinweis: Landau-Lifschitz Bd. II.

27. Zeigen Sie, dass man die Komponenten des durch $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ definierten Feldstärketensors folgendermaßen durch die Komponenten von \vec{E} und \vec{B} ausdrücken kann:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

28. Zeigen Sie, dass die räumlichen Komponenten der manifest kovarianten Bewegungsgleichung

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

gleichbedeutend sind mit der Bewegungsgleichung in 3-Vektor-Form und die zeitliche Komponente dem aus der Bewegungsgleichung folgenden Ausdruck für die zeitliche Änderung der kinetischen Energie entspricht.

29. Mit Hilfe des total antisymmetrischen (Pseudo-) Tensors $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ kann man den dualen Feldstärketensor $\tilde{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ definieren. Überprüfen Sie:

$$(\tilde{F}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

30. Drücken Sie die Invarianten $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ und $\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ durch \vec{E} und \vec{B} aus. Kann ein elektromagnetisches Feld, das in einem Inertialsystem rein elektrisch ist in einem anderen Inertialsystem rein magnetisch werden?
31. Zeigen Sie, dass sich die erste Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen in der manifest kovarianten Form $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ schreiben lässt.

32. Zeigen Sie durch explizites Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi},$$

dass sich die Feldgleichung bei der Ersetzung $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu f^\mu(\phi(x), x)$ nicht ändert.

33. Ladungsdichte ρ und Stromdichte \vec{j} eines Systems von Punktladungen sind durch

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{x}) &= \sum_a q_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a(t)), \\ \vec{j}(t, \vec{x}) &= \sum_a q_a \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_a(t)) \frac{d\vec{x}_a(t)}{dt} \end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \text{div} \vec{j} = 0$ erfüllt ist.

34. Zeigen Sie, dass die manifest kovariante Gleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

äquivalent ist zur zweiten Gruppe der Maxwell'schen Gleichungen:

$$\text{div} \vec{E}(t, \vec{x}) = 4\pi\rho(t, \vec{x}), \quad \text{rot} \vec{B}(t, \vec{x}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(t, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t}.$$

Zur Erinnerung: $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$.

35. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}\vec{E}(t, \vec{x}) &= \vec{E}_0 \cos(\omega t - \omega \vec{n} \cdot \vec{x}/c + \alpha), \\ \vec{B}(t, \vec{x}) &= \vec{n} \times \vec{E}_0 \cos(\omega t - \omega \vec{n} \cdot \vec{x}/c + \alpha)\end{aligned}$$

eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ ist. \vec{n} ist ein auf \vec{E}_0 normal stehender Einheitsvektor, α ist eine Konstante.

36. Transformieren Sie das Feld der ebenen elektromagnetischen Welle des vorigen Beispiels mit Hilfe unserer Standard-Lorentztransformation. Zeigen Sie, dass man wieder eine elektromagnetische Welle erhält und geben Sie \vec{E}'_0 , ω' und \vec{k}' ($\vec{k} = \omega \vec{n}/c$) explizit an.

37. In der Vorlesung wurde das elektromagnetische Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung durch die Lorentztransformation des Feldstärketensors einer ruhenden Punktladung ermittelt.

In dieser Aufgabe sollen Sie das Ergebnis auf eine andere Art bekommen: Ermitteln Sie zunächst das Viererpotential einer Punktladung, die im Ursprung des Systems S' ruht. Berechnen Sie sodann das Viererpotential einer bewegten Ladung durch eine Lorentztransformation in das System S . Bestimmen Sie aus ϕ , \vec{A} sodann \vec{E} und \vec{B} .

38. Berechnen Sie mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen und der Integralversion der elektrostatischen Gleichungen das elektrische Feld \vec{E} eines in der z -Achse liegenden unendlich langen (und unendlich dünnen) homogen geladenen Fadens. Die Längenladungsdichte des Fadens werde mit λ (= Ladung/Länge) bezeichnet. Geben Sie die dazugehörige Raumladungsdichte $\rho(\vec{x})$ an.

39. In der z' -Achse des Systems S' ruhe ein homogen geladener Faden mit Längenladungsdichte λ' . Das System S' bewege sich relativ zum System S mit der Geschwindigkeit V in Richtung der positiven z -Achse. Wie lautet die entsprechende Lorentztransformation zwischen den beiden Inertialsystemen? Wie groß sind $\lambda =$ Ladung/Länge und der Strom I im System S' ? Wie lautet die Viererstromdichte in S' ? Was ergibt sich für das elektromagnetische Feld im System S' ?

40. Berechnen Sie mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen und der Integralversion der magnetostatischen Gleichungen das Magnetfeld \vec{B} eines in der z -Achse fließenden Stromes I . Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Resultat des vorigen Beispiels.

41. Zeigen Sie, dass das Dipolmoment einer insgesamt neutralen Ladungsverteilung ($Q = 0$) von der Wahl des Koordinatenursprungs unabhängig ist.
42. In der Vorlesung wurde für das Potential eines elektrischen Dipols die Formel $\phi^d(\vec{x}) = \phi^d(r\vec{n}) = \vec{n} \cdot \vec{d}/r^2$ angegeben und für das dazugehörige elektrische Feld der Ausdruck

$$E_i^d(r\vec{n}) = -\nabla_i \phi^d(r\vec{n}) = (3n_i n_j - \delta_{ij}) \frac{d_j}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \delta^{(3)}(\vec{x}) d_i.$$

- (a) Überprüfen Sie die letzte Gleichung für $r \neq 0$!
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes für E_i^d , dass die bei $\vec{x} = 0$ sitzende Ladung verschwindet.
- (c) Überzeugen Sie sich davon, dass tatsächlich

$$\int_{\mathcal{K}_\varepsilon} d^3x E_i^d = - \int_{\mathcal{K}_\varepsilon} d^3x \nabla_i \phi^d = -\frac{4\pi}{3} d_i$$

gilt, wobei \mathcal{K}_ε eine infinitesimal kleine Kugel um den Koordinatenursprung ist. Hinweis: Benützen Sie die Formel $\int d\Omega n_i n_j = (4\pi/3) \delta_{ij}$.

- (d) Beweisen Sie die Formel $\int d\Omega n_i n_j = (4\pi/3) \delta_{ij}$ unter Beachtung des Verhaltens der linken Seite unter Drehungen um den Ursprung.

43. Zeigen Sie, dass das Dipolmoment einer Ladungsdichte mit Gesamtladung Null und mit $\rho(-\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ (Spiegelungssymmetrie) verschwindet.

44. Berechnen Sie Dipolmoment und den (kartesischen) Quadrupoltensor für die Ladungsdichte

$$\rho(x, y, z) = q \{ \delta(x) \delta(y) [\delta(z - a) + \delta(z + a)] - \delta(x) \delta(z) [\delta(y - b) + \delta(y + b)] \}$$

und fertigen Sie eine Skizze der Ladungsverteilung an.

45. Zeigen Sie, dass ein mögliches Vektorpotential für ein homogenes Magnetfeld \vec{B} durch $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{B} \times \vec{x}/2$ gegeben ist.

46. In einem in der x - y -Ebene liegenden, kreisförmigen Draht mit Radius r (Mittelpunkt im Ursprung) fließt ein Strom mit Stromstärke I . Berechnen Sie mit Hilfe des Gesetzes von Biot-Savart (Integralformel für \vec{B}) die Stärke des längs der z -Achse ($x = y = 0$, z beliebig) herrschenden Magnetfeldes.

47. Zwischen dem Vektorpotential $\vec{A}(\rho, \varphi, z)$ und dem Magnetfeld $\vec{B}(\rho, \varphi, z)$ in Zylinderkoordinaten besteht die Beziehung

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right) \vec{e}_z.$$

Finden Sie ein zum Magnetfeld von Beispiel 40 ($\vec{B} = 2I\vec{e}_\varphi/c\rho$) passendes Vektorpotential $\vec{A}^{(1)}$ mit $A_\rho^{(1)} \neq 0$, $A_\varphi^{(1)} = A_z^{(1)} = 0$, sowie ein Vektorpotential $\vec{A}^{(2)}$ mit $A_z^{(2)} \neq 0$, $A_\rho^{(2)} = A_\varphi^{(2)} = 0$. Finden Sie sodann eine Eichfunktion $\Lambda(\rho, \varphi, z)$, die $\vec{A}^{(1)}$ mit $\vec{A}^{(2)}$ durch die Eichtransformation $\vec{A}^{(1)} = \vec{A}^{(2)} + \vec{\nabla}\Lambda$ verbindet.

48. Bestimmen Sie die auf eine Wand (mit dem Reflexionsvermögen R) wirkende Kraft, wenn an ihr eine elektromagnetische Welle reflektiert wird. Numerische Diskussion für die Solarkonstante $\simeq 1.4 \text{ kW/m}^2$!

Hinweis: Die Verwendung des Maxwell'schen Spannungstensors könnte sich als nützlich erweisen.

49. Die Drehimpulsdichte des elektromagnetischen Feldes (bezüglich des Koordinatenursprungs) ist das Kreuzprodukt von \vec{x} und der Impulsdichte des Feldes: $\vec{x} \times (\vec{E} \times \vec{B})/4\pi c$. Beweisen Sie diese Behauptung indem Sie zeigen, dass sich in dem Ausdruck

$$\frac{d}{dt} \left[\int_V d^3x \vec{x} \times \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c} + \sum_{\vec{x}_a \in V} \vec{x}_a \times \vec{p}_a \right] = \dots$$

auf der rechten Seite (...) ein Oberflächenintegral ergibt, das als jenes Drehmoment zu interpretieren ist, welches auf das Gebiet V wirkt.

50. Berechnen Sie die retardierte Greenfunktion der Wellengleichung in 2 Raumdimensionen (Δ_2 ist der Laplace-Operator in 2 Dimensionen):

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_2\right) G_{\text{ret}}(t, x, y) = \delta(t)\delta(x)\delta(y).$$

Verwenden Sie die Methode von Hadamard: betrachten Sie die retardierte Lösung der inhomogenen Wellengleichung in 3 Raumdimensionen mit der Ladungsdichte $4\pi\rho(t, \vec{x}) = \delta(t)\delta(x)\delta(y)$. Diese Lösung hängt nicht von der 3. Raumkoordinate z ab und ist daher die gesuchte Greenfunktion in 2 Raumdimensionen.

51. Diskutieren Sie das elektromagnetische Feld in der Fernzone (in Dipolnäherung) für den Hertzchen Dipol $\vec{d}(t) = \vec{d}_0 \cos \omega t$. Was erhält man für die Strahlungsleistung (Winkelverteilung, Gesamtleistung, zeitlicher Mittelwert).
52. Ein geladenes Teilchen bewege sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn ($v \ll c$). Geben Sie das elektromagnetische Feld in der Fernzone an. Was erhält man für die Strahlungsleistung (Winkelverteilung, Gesamtleistung, sowie zeitlicher Mittelwert).
53. Schätzen Sie die Zeit ab, in der bei einer „klassischen“ Behandlung des Wasserstoffatoms, das Elektron aufgrund seines Abstrahlungsverlustes in den Kern stürzen würde.
54. Zwei Dipole im Ursprung des Koordinatensystems mit gleichem Betrag des Dipolmoments d_0 oszillieren mit der selben Kreisfrequenz ω . Der eine oszilliert in der z -Richtung, der andere um $\pi/2$ phasenverschoben in der y -Richtung. Berechnen Sie $\vec{E}(t, \vec{x})$ in der Fernzone bei $\vec{x} = r \vec{e}_x$ und diskutieren Sie die Polarisierung des elektrischen Feldes.

55. Die retardierten Potentiale sind durch

$$\phi(t, \vec{x}) = \int d^3y \frac{\rho(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad \vec{A}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3y \frac{\vec{j}(t - |\vec{x} - \vec{y}|/c, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

gegeben. Überprüfen Sie, dass die Eichbedingung $\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0$ erfüllt ist (Lorenz-Eichung).

Hinweis: Verwenden Sie die Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \text{div } \vec{j} = 0$.

56. Ein Teilchen mit Masse m und elektromagnetischer Ladung q , das sich mit konstanter Geschwindigkeit $v = \beta c$ auf einer Kreisbahn mit Radius r bewegt, verliert pro Umlauf die Energie

$$\Delta E = \frac{4\pi q^2 \beta^3}{3r} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^4.$$

Berechnen Sie ΔE für ein Elektron im LEP-Speicherring ($\mathcal{E} \simeq 100$ GeV, $r \simeq 4.3$ km) und für ein Proton bei LHC (Protonenergie in der geplanten Endausbauphase: $\mathcal{E} = 7$ TeV). Hinweis: $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$

57. Bestimmen Sie den Polarisationsgrad P der elektromagnetischen Welle

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{ein}}(t, \vec{x}) &= \text{Re } \vec{\mathbb{E}}_{\text{ein}}(t, \vec{x}), & \vec{B}_{\text{ein}}(t, \vec{x}) &= \vec{e}_z \times \vec{E}_{\text{ein}}(t, \vec{x}), \\ \vec{\mathbb{E}}_{\text{ein}}(t, \vec{x}) &= E_0 \left[\vec{e}_x e^{-i\omega(t-z/c)} + \vec{e}_y e^{-i\omega'(t-z/c)} \right], & \omega &\neq \omega'.\end{aligned}$$

Hinweis: Betrachten Sie $\langle \vec{\mathbb{E}}_{\text{ein}} \vec{\mathbb{E}}_{\text{ein}}^\dagger \rangle$.

58. Die elektromagnetische Welle von Bsp. 57 werde an einem im Ursprung befindlichen freien Teilchen (Masse m , Ladung q , $v \ll c$) gestreut. Bestimmen Sie das von dem Teilchen emittierte Strahlungsfeld $\vec{E}_{\text{Str}}(t, \vec{x})$ und dessen Polarisationsgrad am Ort $\vec{x} = r\vec{n}$, $\vec{n} = \vec{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_z \cos \theta$.

Hinweis: Beachten Sie, dass

$$\left\langle \vec{\mathbb{E}}_{\text{Str}}(t, r\vec{n}) \vec{\mathbb{E}}_{\text{Str}}^\dagger(t, r\vec{n}) \right\rangle \sim P_{\vec{n}}^\perp \left\langle \vec{\mathbb{E}}_{\text{ein}}(t, \vec{0}) \vec{\mathbb{E}}_{\text{ein}}^\dagger(t, \vec{0}) \right\rangle P_{\vec{n}}^\perp,$$

wobei $P_{\vec{n}}^\perp = \mathbb{1} - \vec{n}\vec{n}^T$ der Projektor auf die Ebene $\perp \vec{n}$ ist. Zeigen Sie sodann, dass $\vec{e}_z - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{e}_z)$ und $\vec{n} \times \vec{e}_z$ in $P_{\vec{n}}^\perp \mathbb{R}^3$ liegende Eigenvektoren des obigen Ausdrucks sind. Aus den dazugehörigen Eigenwerten können Sie die Eigenwerte des Polarisationsensors ermitteln. (Warum?)

59. Die linear polarisierte monochromatische ebene Welle

$$\vec{E}_{\text{ein}}(t, \vec{x}) = E_0 \vec{\varepsilon}(\alpha) \cos(\omega(t - z/c)), \quad \vec{\varepsilon}(\alpha) = \vec{e}_x \cos \alpha + \vec{e}_y \sin \alpha$$

werde an einem freien Punktteilchen (Ruhelage im Ursprung des Koordinatensystems) mit Masse m und elektromagnetischer Ladung q gestreut, wobei angenommen wird, dass $|\vec{x}| \ll c$ erfüllt ist (Thomsonstreuung).

- Berechnen Sie den Poyntingvektor $\vec{S}_{\text{ein}} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{\text{ein}} \times \vec{B}_{\text{ein}}$ der einlaufenden Welle und seinen zeitlichen Mittelwert $\langle \vec{S}_{\text{ein}} \rangle$. Hinweis: $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$.
- Berechnen Sie das von dem durch die einfallende Welle beschleunigten Teilchen emittierte Strahlungsfeld $\vec{E}_{\text{Str}}(t, r\vec{n})$ am Ort $\vec{x} = r\vec{n}$ (in der Fernzone), wobei \vec{n} ein vom Ursprung zum Beobachtungspunkt weisender Einheitsvektor ist.
- Berechnen Sie die in Richtung \vec{n} in das Raumwinkelement $d\Omega$ abgestrahlte Leistung dP_{Str} und deren zeitlichen Mittelwert $\langle dP_{\text{Str}} \rangle$.
- Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega = \langle dP_{\text{Str}}/d\Omega \rangle / \langle |\vec{S}_{\text{ein}}| \rangle$ und drücken Sie ihn durch den Winkel χ zwischen dem Polarisationsvektor $\vec{\varepsilon}(\alpha)$ und der Beobachtungsrichtung \vec{n} aus ($\vec{n} \cdot \vec{\varepsilon}(\alpha) = \cos \chi$).

60. Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Thomsonstreuung für unpolarisierte einfallende Strahlung, indem Sie das Resultat der vorigen Aufgabe über alle möglichen Polarisationsrichtungen von \vec{E}_{ein} mitteln. Hinweis: Parametrisieren Sie die Beobachtungsrichtung durch

$$\vec{n} = \vec{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_z \cos \theta$$

und beachten Sie, dass bei der Mittelung über den Polarisationswinkel α gilt:

$$\langle \cos^2 \alpha \rangle = \langle \sin^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \cos \alpha \sin \alpha \rangle = 0.$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der im Skriptum angegebenen Formel und berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{T, unpol}}$. Was ergibt sich numerisch für den Fall der Streuung an einem Elektron?

61. Die zirkular polarisierte monochromatische ebene Welle

$$\vec{E}_{\text{ein}}(t, \vec{x}) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\vec{e}_x \cos(\omega(t - z/c)) + \vec{e}_y \sin(\omega(t - z/c))]$$

werde an einem freien Punktteilchen mit Masse m und elektromagnetischer Ladung q gestreut ($|\dot{\vec{x}}| \ll c$).

- Berechnen Sie $\vec{B}_{\text{ein}}(t, \vec{x})$.
 - Berechnen Sie \vec{S}_{ein} .
 - Berechnen Sie $\vec{E}_{\text{Str}}(t, r\vec{n})$.
 - Berechnen Sie dP_{Str} und den zeitlichen Mittelwert $\langle dP_{\text{Str}} \rangle$.
 - Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt.
62. In der Quantenelektrodynamik erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Comptonstreuung die Klein-Nishina-Formel

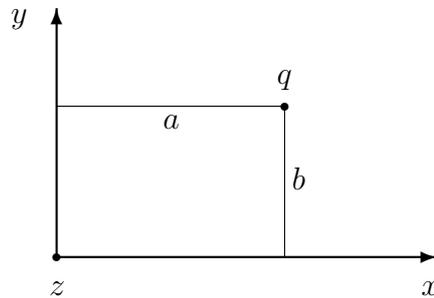
$$\frac{d\sigma_{\text{unpol}}}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} \right) - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right],$$

wobei der Zusammenhang zwischen ω' (Kreisfrequenz des Photons im Endzustand) und ω (Kreisfrequenz des Photons im Anfangszustand) durch

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 + \frac{2\hbar\omega}{m_e c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

gegeben ist (vgl. Aufgabe 22). Diskutieren Sie die Klein-Nishina-Formel für den Grenzfall kleiner Frequenzen. Was bedeutet „klein“ in diesem Zusammenhang?

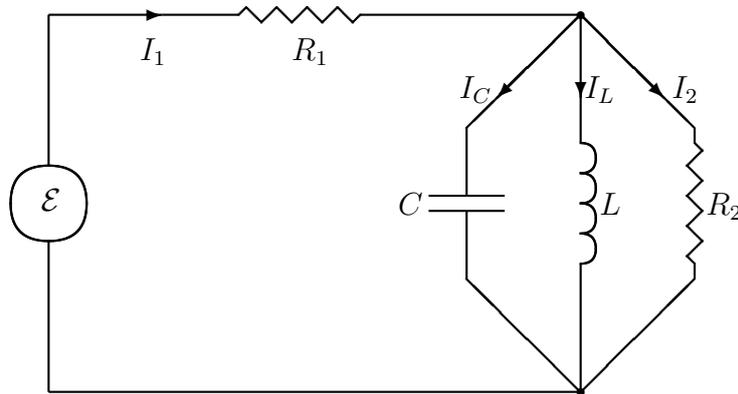
63. Eine Punktladung q befinde sich am Ort $\vec{r} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$. Die Halbebenen $x \geq 0, y = 0$ und $x = 0, y \geq 0$ bilden die Oberfläche eines Leiters:



- (a) Bestimmen Sie das Potential $\phi(x, y, z)$ (für $x \geq 0, y \geq 0$) mit Hilfe geeigneter Spiegelladungen, sodass auf der Leiteroberfläche $\phi = 0$ gilt.
- (b) Berechnen Sie das aus dem Potential folgende elektrische Feld.
- (c) Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte auf der Leiteroberfläche.
- (d) Berechnen Sie die Kraft auf die am Ort \vec{r} befindliche Ladung.
64. Behandeln Sie das Problem einer leitenden **geerdeten** Kugel $|\vec{x}| \leq a$ und einer am Ort $\vec{r} = b\vec{e}_x$ ($b > a$) befindlichen Punktladung q .
- (a) Bestimmen Sie das Potential $\phi(\vec{x})$ (für $|\vec{x}| \geq a$) mit Hilfe einer geeigneten Spiegelladung (siehe Vorlesung), sodass auf der Kugeloberfläche $\phi = 0$ erfüllt ist.
- (b) Berechnen Sie das aus dem Potential folgende elektrische Feld.
- (c) Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte auf der Kugeloberfläche.
- (d) Berechnen Sie die Kraft auf die am Ort \vec{r} befindliche Ladung.
65. Behandeln Sie das Problem einer leitenden **isolierten** Kugel $|\vec{x}| \leq a$ und einer am Ort $\vec{r} = b\vec{e}_x$ ($b > a$) befindlichen Punktladung q .
- (a) Bestimmen Sie das Potential $\phi(\vec{x})$ (für $|\vec{x}| \geq a$) mit Hilfe geeigneter Spiegelladungen (siehe Vorlesung).
- (b) Berechnen Sie das aus dem Potential folgende elektrische Feld.
- (c) Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte auf der Kugeloberfläche.
- (d) Berechnen Sie die Kraft auf die am Ort \vec{r} befindliche Ladung.

66. Gegeben sei eine analytische Funktion $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Diskutieren Sie:
- Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen.
 - $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.
 - Die Kurven $u(x, y) = c$ und $v(x, y) = c'$ stehen in ihrem Schnittpunkt aufeinander normal (c und c' sind Konstanten).
67. Diskutieren Sie das durch die Funktion $f(z) = -E_\infty(z + R^2/z)$ der komplexen Variablen $z = x + iy$ beschriebene elektrostatische Problem, wenn das Potential $\phi(x, y)$ durch den Imaginärteil von $f(z)$ gegeben ist. (Vorlesung: leitender Zylinder $x^2 + y^2 \leq R^2$ in asymptotischem elektrischen Feld $\vec{E} \rightarrow E_\infty \vec{e}_y$.)
- Bestimmen Sie $u(x, y)$ und $v(x, y) \equiv \phi(x, y)$. Welche physikalische Interpretation haben die Kurven $u(x, y) = \text{const.}$ und $v(x, y) = \text{const.}$?
 - Berechnen Sie $\vec{E}(x, y)$ für $x^2 + y^2 \geq R^2$.
 - Berechnen Sie die Flächenladungsdichte und die Gesamtladung auf der Zylinderoberfläche $x^2 + y^2 = R^2$.
68. Ein Koaxialkabel besteht aus zwei leitenden koaxialen Kreiszyklindern der Länge L mit Radien $r_1 < r_2$, die symmetrisch um die z -Achse liegen. Die Ladungen q und $-q$ sind homogen auf den Zylindern verteilt. Berechnen Sie das Potential und das elektrische Feld zwischen den Zylindern unter Vernachlässigung der Randeffekte, d.h. vernachlässigen Sie für die Berechnung von ϕ und \vec{E} die z -Abhängigkeit und verwenden Sie Zylinderkoordinaten. Wie groß ist die Kapazität pro Länge des Kabels? Welche Kapazität (im Gauß- und im SI-System) besitzt ein 1 m langes Kabel mit $r_1 = 3 \text{ mm}$, $r_2 = 5 \text{ mm}$?
- Hinweis: $1 \text{ F(arad)} = 9 \times 10^{11} \text{ cm}$.
69. Im Halbraum $x < 0$ befinde sich ein Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ε und im Halbraum $x > 0$ sei Vakuum. Am Ort $\vec{x} = a\vec{e}_x$ ($a > 0$) befinde sich eine Punktladung q . Berechnen Sie das elektrische Feld im gesamten Raum und die influenzierte Ladungsdichte in der Grenzschicht. Wie groß ist die auf die Ladung wirkende Kraft?

70. Berechnen Sie die Ströme durch die einzelnen Impedanzen des abgebildeten Schaltkreises für eine angelegte Wechselspannung $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp(i\omega t)$ (alles in komplexer Notation). Wie vereinfachen sich die Ströme im Resonanzfall $\omega^2 LC = 1$? Interpretieren Sie das Ergebnis. Hinweis: drücken Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln zunächst alle Ströme durch den Strom I_2 aus, der über den Ohmschen Widerstand R_2 fließt. Dann können Sie I_2 als Funktion von \mathcal{E} , R_1 , R_2 , L , C und ω berechnen und damit auch alle anderen Ströme.



71. Bestimmen Sie die minimalen Frequenzen für TE- und TM-Wellen in dem in der Vorlesung behandelten rechteckigen Wellenleiter.