Teilchenphysik II, Sommersemester 2017
Prüfungsfragen

1. Einleitung

   1.1. Was versteht man unter der Comptonlänge eines Teilchens mit Masse m? Geben Sie ihre Größenordnung für ein Elektron (Pion, Proton, $W^{\pm}, Z^0$) an. Hinweis: $\hbar c \simeq 197\,\text{MeV} \times \text{fm}$.

   1.2. Wieso gibt es keine konsistente relativistische Einteilchen-Quantenmechanik?

2. Relativistisches Skalarfeld

   Die Fragen (2.1-2.17) beziehen sich auf ein *freies reelles* Skalarfeld $\varphi(x)$.

   2.1. Wie lautet die Lagrangedichte? Leiten Sie die dazugehörige Feldgleichung mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung her.

   2.2. Wie erhält man das zu φ kanonisch konjugierte Feld π?

   2.3. Wie lautet der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$? Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ erfüllt ist.

   2.4. Wie erhält man den Viererimpuls des Feldes aus dem Energie-Impuls-Tensor?

   2.5. Was versteht man unter „kanonischer Quantisierung“?

   2.6. Schreiben Sie die Fourierzerlegung von $\varphi(x)$ an.

   2.7. Wie lauten die Vertauschungsrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren?

   2.8. Drücken Sie den Impulsoperator durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus.

   2.9. Durch welche Eigenschaften ist der Vakuumzustand $|0\rangle$ charakterisiert?

   2.10. Drücken Sie den Gesamtteilchenzahloperator durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus.

   2.11. Wie ist $|p_1, p_2, \ldots p_n\rangle$ definiert? Wie lautet der Projektor auf den n-Teilchen-Unterraum des Fockraums?

   2.12. Schreiben Sie die allgemeine Form eines *normierbaren* Zweiteilchenzustands durch Anwendung einer geeigneten Operation auf den Vakuumzustand an. Wie macht sich die Tatsache bemerkbar, dass es sich bei den Teilchen um Bosonen handelt?

2.13. Was versteht man unter dem Fockraum?

2.14. Wie ist das zeitgeordnete Produkt $\mathrm{T}\,(\varphi(x)\varphi(y))$ definiert?

2.15. Der (freie) Propagator ist durch $\Delta(x) = i\langle 0|\mathrm{T}\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$ definiert. Welche Differentialgleichung und welche Randbedingungen erfüllt er? Wie lautet seine Fourierdarstellung?

2.16. Führen Sie die p^0-Integration in der Fourierdarstellung

$$\Delta(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip\cdot x}}{m^2 - p^2 - i\epsilon}, \quad (\epsilon > 0)$$

des freien Propagators mit Hilfe des Residuensatzes für $x^0 > 0$ ($x^0 < 0$) aus.

2.17. Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass der Kommutator $[\varphi(x), \varphi(y)]$ verschwindet, falls x und y zueinander raumartig sind.

Die Fragen ($2.18 - 2.25$) beziehen sich auf ein freies *komplexes* Skalarfeld $\phi(x)$.

2.18. Wie lautet die Lagrangedichte? Wie lautet die daraus folgende Feldgleichung? Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte unter einer globalen U(1)-Eichtransformation invariant ist. Wie lautet die dazugehörige Noetherstromdichte $j_\mu(x)$? Zeigen Sie, dass die Kontinuitätsgleichung $\partial^\mu j_\mu = 0$ erfüllt ist.

2.19. Schreiben Sie die Fourierzerlegung von $\phi(x)$ an.

2.20. Welche Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gibt es in diesem Fall und wie sind sie zu interpretieren? Wie lauten ihre Vertauschungsrelationen?

2.21. Drücken Sie den Gesamtteilchenzahloperator durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus.

2.22. Drücken Sie den Ladungsoperator durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus.

2.23. Drücken Sie den Energie-Impuls-Operator durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus.

2.24. $\mathcal{C}$ sei der Ladungskonjugationsoperator. Ergänzen Sie die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^\dagger &= \ldots, \qquad \mathcal{C}j^\mu(x)\mathcal{C}^\dagger = \ldots, \qquad \mathcal{C}Q\mathcal{C}^\dagger = \ldots, \\
\mathcal{C}a_\pm(p)\mathcal{C}^\dagger &= \ldots, \qquad \mathcal{C}a_\pm(p)^\dagger\mathcal{C}^\dagger = \ldots, \\
\mathcal{C}|0\rangle &= \ldots, \qquad \mathcal{C}|p,\pm\rangle = \ldots
\end{aligned}$$

2.25. Nennen Sie Beispiele für Teilchen, die durch komplexe Skalarfelder beschrieben werden.

2.26. Was versteht man unter Normalordnung (im Fall von Bosonen)?

2.27. Was versteht man unter Mikrokausalität in einer relativistischen Quantenfeldtheorie?

2.28. $\phi(x)$ sei der Feldoperator eines reellen Skalarfeldes einer (i.A. wechselwirkenden) relativistischen Quantenfeldtheorie. $\pi(x)$ sei das zu $\phi(x)$ konjugierte Feld. Zeigen Sie mit Hilfe der kanonischen Vertauschungsrelationen, dass die Kommutatoren $[\varphi(x), \varphi(y)]$ und $[\varphi(x), \pi(y)]$ verschwinden, falls x und y zueinander raumartig sind.

3. Funktionalintegral (Pfadintegral)

Die Fragen (3.1-3.6) beziehen sich auf eine skalare Feldtheorie mit einem reellen Feld $\varphi(x)$. Der entsprechende Feldoperator werde mit $\phi(x)$ bezeichnet.

3.1. Geben Sie die Definition der n-Punkt-Green-Funktion des Feldes in der Operatordarstellung an.

3.2. Wie lautet die Pfadintegraldarstellung der n-Punkt-Funktion?

3.3. Wie lautet die Definition des erzeugenden Funktionals sowohl in der Operatordarstellung als auch als Pfadintegral?

3.4. Das erzeugende Funktional eine freien *reellen* Skalarfeldes,

$$Z[f] = \langle 0|\mathrm{T}\, e^{i\int d^4x\, f(x)\phi(x)}|0\rangle,$$

kann explizit berechnet werden. Wie lautet die Lösung?

3.5. Wie lautet das Wick-Theorem für ein *freies* reelles Skalarfeld?

3.6. Wenden Sie das Wicktheorem auf die 4-Punkt-Funktion eines *freien* reellen Skalarfeldes an:

$$\langle 0|\mathrm{T}\, \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle = \ldots$$

4. Störungstheorie

Die Fragen (4.1-4.7) beziehen sich auf eine *wechselwirkende* skalare Feldtheorie mit einem reellen Skalarfeld $\varphi(x)$ und Wirkung

$$S[\varphi] = S_0[\varphi] + S_{\mathrm{int}}[\varphi], \qquad S_0[\varphi] = \frac{1}{2}\int d^dx\, (\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\phi^2).$$

4.1. Wie lautet die Störungsreihenentwicklung der n-Punktfunktion in der Funktionalintegraldarstellung?

$$\langle 0|\mathrm{T}\, \phi(x_1)\ldots\phi(x_n)|0\rangle = \ldots$$

4.2. Schreiben Sie die Lagrangedichte der φ^4-Theorie an. Wie lautet die daraus folgende Feldgleichung?

4.3. Drücken Sie die Zweipunktfunktion der φ^4-Theorie bis inkl. Einschleifenbeiträge durch Zweipunktfunktionen der freien Theorie aus. Zeichnen Sie die entsprechenden Feynmandiagramme auf.

$$\langle 0|\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = \ldots$$

4.4. Die φ^3-Theorie ist durch den Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_{\text{int}} = -g\varphi^3/3!$ definiert. Wie lautet die daraus folgende Feldgleichung?

4.5. Drücken Sie die Zweipunktfunktion der φ^3-Theorie bis inkl. Einschleifenbeiträge durch Zweipunktfunktionen der freien Theorie aus. Zeichnen Sie die entsprechenden Feynmandiagramme auf.

$$\langle 0|\mathrm{T}\,\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = \ldots$$

4.6. Wie ist die Feldrenormierungskonstante Z definiert?

4.7. Wie ist die Form der Zweipunktfunktion eines wechselwirkenden reellen Skalarfeldes in der Nähe des Pols?

$$\langle 0|\mathrm{T}\,\phi(x)\phi(0)|0\rangle = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\cdots$$

5. Dimensionale Regularisierung und Renormierung

5.1. Berechnen Sie

$$\Delta(0) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}$$

mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung. Für welche Werte von d besitzt $\Delta(0)$ Pole?

5.2. Drücken Sie den *zusammenhängenden* Teil der 4-Punkt-Funktion der φ^4-Theorie bis inkl. Einschleifenbeiträge durch Zweipunktfunktionen der freien Theorie aus. Zeichnen Sie die entsprechenden Feynmandiagramme.

5.3. Drücken Sie den *zusammenhängenden* Teil der Baumgraphenbeiträge zur 4-Punkt-Funktion der φ^3-Theorie durch Zweipunktfunktionen der freien Theorie aus. Zeichnen Sie die entsprechenden Feynmandiagramme.

5.4. Drücken Sie den Einschleifenbeitrag zur Einpunktfunktion der φ^3-Theorie durch Zweipunktfunktionen der freien Theorie aus. Zeichnen Sie die entsprechenden Feynmandiagramme.

6. Renormierbarkeit

   6.1. Welche Gegenterme können in der φ^4-Theorie auftreten?

   6.2. Geben Sie ein Beispiel für einen 1-Teilchen-irreduziblen Graphen.

   6.3. Geben Sie ein Beispiel für einen Graphen, der *nicht* 1-Teilchen-irreduzibel ist.

   6.4. Ist die φ^6-Theorie in $d = 4$ Raum-Zeit-Dimensionen eine renormierbare Theorie?

7. Reduktionsformalismus

   7.1. Welcher physikalischen Situation entspricht der Heisenbergzustand $|p_1,\, p_2 \text{ ein}\rangle$?

   7.2. Welcher physikalischen Situation entspricht der Heisenbergzustand $|p_1,\, p_2 \text{ aus}\rangle$?

   7.3. Erklären Sie die Begriffe S-Matrixelement und S-Operator. Welche wichtige Eigenschaft hat der S-Operator?

   7.4. Wie lautet die Asymptotenbedingung?

   7.5. Wie lautet der Zusammenhang zwischen dem S-Matrixelement $\langle p_3,\, p_4 \text{ aus}|p_1,\, p_2 \text{ ein}\rangle$ und der (zusammenhängenden) 4-Punkt-Funktion $\langle 0|\mathrm{T}\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle_c$ in einer skalaren Feldtheorie?

8. Wirkungsquerschnitt

   8.1. Geben Sie den Zusammenhang zwischen dem S-Matrixelement $\langle k_1,\, \ldots k_n \text{ aus}|p_1,\, p_2 \text{ ein}\rangle$ (skalare Teilchen) und der invarianten Amplitude $\mathcal{M}(p_1,\, p_2 \to k_1 \ldots k_n)$ an.

   8.2. Wie berechnet man den Wirkungsquerschnitt $\sigma(p_1,\, p_2 \to B)$, wenn die invariante Amplitude $\mathcal{M}(p_1,\, p_2 \to k_1 \ldots k_n)$ bekannt ist? (B ist ein bestimmter Bereich des n-Teilchen-Phasenraumes.)

9. Diracfeld

   Die Fragen (9.1-9.17) beziehen sich auf ein *freies* Diracfeld mit Masse m.

   9.1. Schreiben Sie die Lagrangedichte eines freien Diracfeldes mit Masse m an. Wie lautet die daraus folgende Feldgleichung und deren allgemeine Lösung?

   9.2. Kanonische Quantisierung des Diracfeldes.

   9.3. Welche Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gibt es im Fall des freien Diracfeldes. Welche Relationen erfüllen sie? Welche physikalische Bedeutung besitzen sie?

9.4. Durch welche Eigenschaften ist der Vakuumzustand $|0\rangle$ des freien Diracfeldes charakterisiert?

9.5. Schreiben Sie die allgemeine Form eines *normierbaren* Zustands mit genau einem Elektron durch Anwendung einer geeigneten Operation auf den Vakuumzustand an.

9.6. Schreiben Sie die allgemeine Form eines *normierbaren* Zustands mit genau einem Positron durch Anwendung einer geeigneten Operation auf den Vakuumzustand an.

9.7. Schreiben Sie die allgemeine Form eines *normierbaren* Zustands mit genau zwei Elektronen durch Anwendung einer geeigneten Operation auf den Vakuumzustand an. Wie macht sich die Tatsache bemerkbar, dass Elektronen Fermionen sind?

9.8. Schreiben Sie die allgemeine Form eines *normierbaren* Zustands mit genau zwei Positronen durch Anwendung einer geeigneten Operation auf den Vakuumzustand an. Wie macht sich die Tatsache bemerkbar, dass Positronen Fermionen sind?

9.9. Drücken Sie den Energie-Impuls-Operator des freien Diracfeldes durch $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ aus.

9.10. Drücken Sie den Energie-Impuls-Operator des freien Diracfeldes durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus.

9.11. Zeigen Sie, dass die Lagrangedichte des freien Diracfeldes unter einer globalen U(1)-Eichtransformation invariant ist. Wie lautet die dazugehörige Noetherstromdichte?

9.12. Drücken Sie den Ladungsoperator des Diracfeldes durch $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ aus.

9.13. Drücken Sie den Ladungsoperator des freien Diracfeldes durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus.

9.14. Wie ist das zeitgeordnete Produkt zweier Fermionfelder definiert?

$$\mathrm{T}\left(\psi_a(x)\psi_b(y)\right) = \dots$$

9.15. Berechnen Sie $\langle 0|\psi_a(x)\psi_b(y)|0\rangle$. Was folgt aus Ihrem Ergebnis für $\langle 0|\mathrm{T}\psi_a(x)\psi_b(y)|0\rangle$?

9.16. Der Propagator des freien Diracfeldes ist durch

$$S_{ab}(x) = i\langle 0|\mathrm{T}\psi_a(x)\bar{\psi}_b(0)|0\rangle$$

definiert. Welche Differentialgleichung und welche Randbedingungen erfüllt $S(x)$? Wie lautet die Fourierdarstellung von $S(x)$?

9.17. Wie lautet das Wicktheorem für ein freies Diracfeld?

$$\langle 0|\mathrm{T}\psi_{a_1}(x_1)\bar{\psi}_{b_1}(y_1)\ldots\psi_{a_n}(x_n)\bar{\psi}_{b_n}(y_n)|0\rangle = \ldots$$

9.18. Wie verhält sich das Diracfeld $\psi(x^0,\vec{x})$ bei einer Paritätstransformation?

9.19. Geben Sie die Definition von γ_5 an.

9.20. Wie transformieren $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$ bei einer Lorentztransformation?

9.21. Wie ist $\sigma^{\mu\nu}$ definiert? Wie transformiert $\bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)$ unter einer Lorentztransformation?

9.22. Wie transformiert sich das Diracfeld bei Ladungskonjugation? Wie ist die Ladungskonjugationsmatrix C definiert? Schreiben Sie ihre Eigenschaften an.

9.23. Leiten Sie das Transformationsverhalten des Ausdrucks $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ unter Ladungskonjugation her.

10. Fermionisches Pfadintegral

10.1. ξ und η seien antikommutierende Größen. Schreiben Sie die Potenzreihenentwicklung von $e^{\xi\eta}$ an.

10.2. $\chi_1,\ldots,\chi_n$ und $f^1,\ldots,f^n$ seien antikommutierende Größen. Berechnen Sie

$$I(f^1,\ldots,f^n) = \frac{\int d\chi_1\ldots d\chi_n\, \exp\left(-\frac{1}{2}D^{k\ell}\chi_k\chi_\ell + f^k\chi_k\right)}{\int d\chi_1\ldots d\chi_n\, \exp\left(-\frac{1}{2}D^{k\ell}\chi_k\chi_\ell\right)},$$

wobei $D^{k\ell} = -D^{\ell k}$ eine antisymmetrische Matrix ist.

10.3. Das erzeugende Funktional eines freien Diracfeldes ist durch

$$Z[\eta,\bar{\eta}] = \left\langle 0\left|\mathrm{T}\exp\left\{i\int d^4x\ \left[\bar{\eta}(x)\Psi(x) + \bar{\Psi}(x)\eta(x)\right]\right\}\right|0\right\rangle$$

definiert, wobei die äußeren Quellen $\eta(x)$, $\bar{\eta}(x)$ Graßmannfelder sind. Wie lautet die Darstellung dieses erzeugenden Funktionals durch ein fermionisches Pfadintegral? Wie lautet die Lösung?

11. Vektorfeld

11.1. $V_\mu(x)$ sei ein freies reelles Vektorfeld mit Masse M. Wie lautet die entsprechende Lagrangedichte? Leiten Sie die daraus folgende Feldgleichung her und schreiben Sie ihre allgemeine Lösung an. Welchen Spin besitzt das dadurch beschriebene Teilchen?

11.2. Wie lautet die Fourierdarstellung der Zweipunktfunktion $\langle 0|\mathrm{T}V_\mu(x)V_\nu(y)|0\rangle$ eines freien reeellen Vektorfeldes (Masse M).

11.3. Gegeben sei der Tensor

$$T_{\mu\nu} = a(k^2)k_\mu k_\nu + b(k^2)g_{\mu\nu},$$

wobei k^μ ein 4-Vektor ist. Berechnen Sie T^{-1}.

11.4. Wie lautet die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik eines geladenen Spin-$\frac{1}{2}$-Feldes (ohne eichfixierenden Term). Zeigen Sie, dass diese Lagrangedichte unter einer lokalen U(1)-Eichtransformation invariant ist.

11.5. Wie lautet die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik eines geladenen Spin-0-Feldes (ohne eichfixierenden Term). Zeigen Sie, dass diese Lagrangedichte unter einer lokalen U(1)-Eichtransformation invariant ist.

11.6. Wie lautet die Lagrangedichte des Photonfeldes in Anwesenheit einer äußeren (klassischen) Viererstromdichte J_μ inkl. eichfixierendem Term (R_ξ-Eichung).

11.7. Wie lautet der Photonpropagator in der R_ξ-Eichung?

$$D_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdots$$

11.8. Betrachten Sie das Photonfeld in Anwesenheit einer äußeren (klassischen) Viererstromdichte J_μ. Was ist in diesem Fall die *physikalische* Interpretation des erzeugenden Funktionals $Z[J]$?

12. Wechselwirkungsbild

12.1. Gegeben sei der Hamiltonoperator $H_\mathrm{S}(t) = H_\mathrm{S}^0 + V_\mathrm{S}(t)$ im Schrödingerbild, wobei $H_S^{(0)}$ zeitlich konstant ist, während $V_\mathrm{S}(t)$ explizit von der Zeit abhängt. Weiters sei A_S ein Operator im Schrödingerbild, der nicht explizit von der Zeit abhängt. Schließlich werde ein (reiner) Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$ im Schrödingerbild durch den Vektor $|\psi_\mathrm{S}(0)\rangle$ repräsentiert.

- Wie ist der Zusammenhang zwischen A_S und $A_\mathrm{IP}(t)$? (IP = Interaction Picture = Wechselwirkungsbild)
- Wie ist der Zusammenhang zwischen $V_\mathrm{IP}(t)$ und $V_\mathrm{S}(t)$?
- Welcher Differentialgleichung genügt $|\psi_\mathrm{IP}(t)\rangle$ und wie lautet ihre (formale) Lösung?
- Wie ist der Zusammenhang zwischen $A_\mathrm{H}(t)$ (H = Heisenbergbild) und $A_\mathrm{IP}(t)$?

12.2. Betrachten Sie ein reelles Skalarfeld φ mit der Wirkung

$$S[\varphi] = S_0[\varphi] + S_{\text{int}}[\varphi],$$

wobei

$$S_0[\varphi] = \frac{1}{2}\int d^d x \, \left(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2\right)$$

der freie Anteil der Wirkung und $S_{\text{int}}[\varphi]$ der Wechselwirkungsteil ist. Drücken Sie das erzeugende Funktional

$$Z[f] = \left\langle 0 \middle| \mathrm{T} e^{i \int d^d x \, f(x) \phi_{\mathrm{H}}(x)} \middle| 0 \right\rangle$$

durch Greenfunktionen von ϕ_{IP} bezüglich des störungstheoretischen Vakuums $|0)$ aus. Diese Formel bildet die Grundlage der störungstheoretischen Berechnung des erzeugenden Funktionals im Wechselwirkungsbild.

13. Quantenelektrodynamik von Spin-$\frac{1}{2}$-Fermionen

13.1. Schreiben Sie die Feynmanregeln der Quantenelektrodynamik eines Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchens zur Berechnung von $i\mathcal{M}_{\mathrm{fi}}$ an und zeichnen Sie die entsprechenden (Teile der) Feynmangraphen auf.

- Teilchen mit Impuls p und Spin s im Anfangszustand
- Antiteilchen mit Impuls p und Spin s im Anfangszustand
- Teilchen mit Impuls p und Spin s im Endzustand
- Antiteilchen mit Impuls p und Spin s im Endzustand
- Wechselwirkungsvertex
- Innere Photonlinie in der Feynmaneichung
- Innere Fermionlinie
- Photon mit Impuls k im Anfangszustand
- Photon mit Impuls k im Endzustand

13.2. Zeichnen Sie die Feynmandiagramme für den Baumgraphenbeitrag des Prozesses $e^+e^- \to e^+e^-$ und schreiben Sie den entsprechenden Beitrag zu $i\mathcal{M}$ an.

13.3. Zeichnen Sie die Feynmandiagramme für den Baumgraphenbeitrag des Prozesses $e^-e^- \to e^-e^-$ und schreiben Sie den entsprechenden Beitrag zu $i\mathcal{M}$ an.

13.4. Zeichnen Sie die Feynmandiagramme für den Baumgraphenbeitrag der Comptonstreuung $e^-\gamma \to e^-\gamma$ und schreiben Sie den entsprechenden Beitrag zu $i\mathcal{M}$ an.

13.5. Zeichnen Sie die Feynmandiagramme für den Baumgraphenbeitrag zur Paarvernichtung $e^+e^- \to \gamma\gamma$ und schreiben Sie den entsprechenden Beitrag zu $i\mathcal{M}$ an.

13.6. Zeichnen Sie das Feynmandiagramm für den Baumgraphenbeitrag des Prozesses $e^+e^- \to f\bar{f}$ $(f \neq e)$ und schreiben Sie den entsprechenden Beitrag zu $i\mathcal{M}$ an.

13.7. Schreiben Sie den führenden Beitrag zu

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}$$

- unterhalb der $c\bar{c}$-Schwelle, aber oberhalb des Bereichs der Resonanzen der leichten Quarks,
- oberhalb der $c\bar{c}$-Schwelle, aber unterhalb der $b\bar{b}$-Schwelle,
- oberhalb der $b\bar{b}$-Schwelle, aber unterhalb der Produktionsschwelle des Z-Bosons

an und begründen Sie Ihr Antwort.

14. Die anomalen magnetischen Momente von $e^\pm$ und $\mu^\pm$

14.1. Wie lautet die Formfaktorzerlegung des Strommatrixelements

$$\langle p', s' \,| j^\mu(0) |\, p, s \rangle = \ldots$$

für ein Elektron?

14.2. Wie lautet die Gordonzerlegung?

$$\bar{u}(p', s')\gamma^\mu u(p, s) = \ldots$$

14.3. Wie lautet der Zusammenhang zwischen dem magnetischen Moment $\vec{\mu}$ und dem Bahn- und Spindrehimpuls für ein Elektron im nichtrelativistischen Limes? Wie ist der Zusammenhang zwischen dem g-Faktor und dem Formfaktor $F_2(0)$? Wie ist a_e definiert?

14.4. Welcher Graph liefert den Einschleifenbeitrag zum anomalen magnetischen Moment des Elektrons? Welcher Wert ergibt sich in dieser Ordnung für a_e?

15. Nichtabelsche Eichtheorien

15.1. Gegeben sei eine Liealgebra $\mathcal{L}$ mit Generatoren $T_1, \ldots, T_n$ und Vertauschungsrelationen $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$. Was versteht man unter einer (linearen) Darstellung dieser Liealgebra?

15.2. Schreiben Sie die Paulimatrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ an. Eine mögliche Basis der Liealgebra su(2) ist durch $T_a = \sigma_a/2$ gegeben. Wie lauten die Vertauschungsrelationen?

$$[T_a, T_b] = \ldots$$

Wie erhält man eine dreidimensionale Darstellung der su(2)?

15.3. Schreiben Sie die Gell-Mann-Matrizen $\lambda_1, \ldots, \lambda_8$ an. Eine mögliche Basis der Liealgebra su(3) ist durch $T_a = \lambda_a/2$ gegeben. Auf welche Weise kann man dann die Strukturkonstanten der su(3) erhalten? Berechnen Sie als Beispiel f_{123} und f_{124}. Wie erhält man die achtdimensionale Darstellung der su(3) mit Hilfe der Strukturkonstanten f_{abc}?

15.4. Gegeben sei eine nichtabelsche Gruppe G. ψ sei ein fermionisches Multiplett, das sich bezüglich G nach der (unitären) Darstellung $U = \exp(-i\alpha_a T_a)$ transformiert.

- Wie lautet die auf ψ wirkende kovariante Ableitung?
- Wie transformiert $A_\mu(x) := T_a A^a_\mu(x)$ bei der lokalen Eichtransformation $\psi'(x) = U(x)\psi(x)$.
- Wie ist der verallgemeinerte Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = T_a F^a_{\mu\nu}$ definiert? Wie ist sein Transformationsverhalten bei einer lokalen Eichtransformation?
- Schreiben Sie die Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_A$ an. Welche Selbstwechselwirkungsterme der Eichfelder gibt es?

16. Quantisierung nichtabelscher Eichfelder

16.1. Gegeben sei eine reine (nichtabelsche) Eichtheorie mit Lagrangedichte $\mathcal{L}[A]$.

- Schreiben Sie $\mathcal{L}[A]$ an
- Wie lautet der eichfixierende Term $\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}[A]$ im Fall der R_ξ-Eichung?
- Wie lautet der Faddeev-Popov-Term $\mathcal{L}_{FP}[\bar{c}, c, A]$ im Fall der R_ξ-Eichung?
- Schreiben Sie die Feynmanregeln für den Geistpropagator und die Kopplung der Geister an die Eichfelder an.

17. Spontane Symmetriebrechung

17.1. Erklären Sie (in einem Satz) den Unterschied zwischen der Wigner-Weyl- und der Nambu-Goldstone-Realisierung einer Symmetrie in einer Quantenfeldtheorie.

17.2. Geben Sie ein Beispiel für spontane Symmetriebrechung in der Festkörperphysik.

17.3. Die Lagrangedichte einer relativistischen Quantenfeldtheorie besitze eine (globale) Symmetrie bezüglich einer Liegruppe G. Was versteht man unter einem Ordnungsparameter? Wie lautet das Goldstonetheorem?

17.4. Die Lagrangedichte einer relativistischen Quantenfeldtheorie besitze eine (globale) Symmetrie bezüglich einer Liegruppe G (mit dazugehöriger Liealgebra $\mathcal{L}$). Die Symmetrie sei spontan gebrochen auf die Untergruppe H (mit dazugehöriger Liealgebra $\mathcal{H}$). Durch welche Eigenschaft ist die Subalgebra $\mathcal{H}$ definiert?

$$\mathcal{H} = \{Q \in \mathcal{L} | \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

Zeigen Sie, dass das so definierte $\mathcal{H}$ tatsächlich eine Subalgebra von $\mathcal{L}$ bildet. Wie hängt die Anzahl der Goldstonefelder mit den Dimensionen $d(G)$ und $d(H)$ zusammen?

17.5. Die spontane Brechung einer *diskreten* Symmetrie ist *nicht* mit dem Auftreten masseloser Felder verbunden. Betrachten Sie z.B. ein reelles Skalarfeld φ mit einer durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi)$$

beschriebenen Selbstwechselwirkung:

$$V(\varphi) = -\frac{\kappa}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4, \qquad \lambda > 0.$$

Die diskrete Symmetrie $\varphi \to -\varphi$ ist für $\kappa > 0$ spontan gebrochen.

- Bestimmen sie die Minima des Potential $V(\varphi)$ (Skizze!).
- Wählen Sie $v > 0$, schreiben Sie $\varphi = v + \varphi'$, sodass der Vakuumerwartungswert von φ' (in Baumgraphennäherung) verschwindet.
- Drücken Sie $\mathcal{L}$ durch φ' aus und ermitteln Sie die Masse und die Selbstwechselwirkungsterme von φ'

18. Spontane Brechung von lokalen Eichsymmetrien

18.1. Beschreiben Sie in einem Satz den Unterschied zwischen der spontanen Brechung einer globalen und einer lokalen Eichsymmetrie.

18.2. Kennen Sie ein Beispiel für die spontane Brechung einer *lokalen* Eichsymmetrie aus der Festkörperphysik?

18.3. Betrachten Sie die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - V(\phi).$$

ϕ ist ein komplexes Skalarfeld mit kovarianter Ableitung

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi.$$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ der Feldstärketensor eines abelschen Eichfeldes und

$$V(\phi) = r\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2, \qquad \lambda > 0,$$

beschreibt eine skalare Selbstwechselwirkung.

- Für $r = m^2 > 0$ ist die U(1)-Symmetrie der Theorie *nicht* spontan gebrochen. Wie ist das Massenspektrum in diesem Fall?
- Für $r < 0$ ist die U(1)-Symmetrie spontangebrochen. Ermitteln Sie die Minima des Potentials in diesem Fall.
- Im Fall spontaner Symmetriebrechung, können Sie in der unitären Eichung

  $$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(v + h(x)\big)$$

  schreiben, wobei der Vakuumerwartungswert des Feldes $h(x)$ (in Baumgraphennäherung) verschwindet. Geben Sie den Zusammenhang zwischen v und den Parametern r, λ an.
- Schreiben Sie $\mathcal{L}(A, h)$ an, bestimmen Sie die Massen M_A, M_h und die verschiedenen Wechselwirkungsterme.

19. Standardmodell der Teilchenphysik

19.1. Schreiben Sie *alle* im Standardmodell (Minimalversion) vorkommenden Felder, geordnet nach Multipletts bezüglich der Eichgruppe

$$\mathrm{SU(3)_c} \times \mathrm{SU(2)_L} \times \mathrm{U(1)_Y}$$

an. Geben Sie weiters das jeweilige Transformationsverhalten bezüglich der Eichgruppe in der Form $(n_{\mathrm{SU(3)}}, n_{\mathrm{SU(2)}}, Y)$ an, wobei $n_{\mathrm{SU(N)}}$ die Dimension der betreffenden Darstellung bezüglich SU(N) bedeutet und Y die schwache Hyperladung.

Hinweis: Die schwache Hyperladung eines Multipletts ist durch die Formel $Q = T_3 + Y/2$ festgelegt.

19.2. $\vec{W}^\mu = (W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu)$ seien die drei zu $\mathrm{SU(2)_L}$ gehörenden Eichfelder. Schreiben Sie den entsprechenden Teil $\mathcal{L}_W$ der Lagrangedichte des Standarmodells an.

19.3. B^μ sei das zu $\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ gehörende Eichfeld. Schreiben Sie den entsprechenden Teil $\mathcal{L}_B$ der Lagrangedichte des Standarmodells an.

19.4. Wie lautet die *allgemeine* Form der kovarianten Ableitung D_μ im Standardmodell, ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und B_μ (ohne Gluonfelder).

19.5. Wie lautet die explizite Form der auf das Higgsdublett ϕ wirkenden kovarianten Ableitung ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und B_μ?

$$D_\mu \phi = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.6. Wie lautet die explizite Form der auf das rechtshändige SU(2)-Singlett u_R wirkenden kovarianten Ableitung ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und B_μ?

$$D_\mu u_\mathrm{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.7. Wie lautet die explizite Form der auf das rechtshändige SU(2)-Singlett d_R wirkenden kovarianten Ableitung ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und B_μ?

$$D_\mu d_\mathrm{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.8. Wie lautet die explizite Form der auf das rechtshändige SU(2)-Singlett ℓ_R wirkenden kovarianten Ableitung ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und B_μ?

$$D_\mu \ell_\mathrm{R} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.9. Wie lautet die explizite Form der auf das linkshändige Leptondublett L wirkenden kovarianten Ableitung ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und B_μ?

$$D_\mu L = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.10. Wie lautet die explizite Form der auf das linkshändige Quarkdublett q_L wirkenden kovarianten Ableitung ausgedrückt durch die Eichfelder $\vec{W}_\mu$ und B_μ?

$$D_\mu q_\mathrm{L} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.11. Wie lauten die Yukawaterme in der minimalen Version des Standardmodells?

$$-\mathcal{L}_\mathrm{Y} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.12. Wie lautet das Higgspotential des Standardmodells?

$$V(\phi) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

19.13. Bestimmen Sie die folgenden Werte der schwachen Hyperladung: $Y(L)$, $Y(\ell_\mathrm{R})$, $Y(q_\mathrm{L})$, $Y(u_\mathrm{R})$, $Y(d_\mathrm{R})$, $Y(\phi)$.

19.14. Die Lagrangedichte (des elektroschwachen Teils) des Standardmodells besteht aus den folgenden Termen:

$$\mathcal{L}_{\text{GWS}} = \mathcal{L}_W + \mathcal{L}_B + \sum_\psi \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{\text{Y}} - V$$

- Aus welchem Term kann man - nach spontaner Symmetriebrechung - die Massen der Vektorbosonen erhalten?
- Aus welchem Term kann man - nach spontaner Symmetriebrechung - die Massen der Fermionen erhalten?
- Aus welchem Term kann man - nach spontaner Symmetriebrechung - die Masse des Higgsbosons erhalten?

19.15. Bestimmen Sie die Massen der Vektorbosonen aus dem Term $\mathcal{L}_\phi = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi$.

- Wie lautet die auf das Higgsdublett $D_\mu \phi$?
- Verwenden Sie, dass der Vakuumerwartungswert des Higgsdubletts ϕ in der Form

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v > 0,$$

geschrieben werden kann.
- Wie ist der Zusammenhang zwischen W_1, W_2 und $W^\pm$?
- Berechnen Sie $D_\mu \langle 0|\phi|0\rangle$.
- Berechnen Sie $(D_\mu \langle 0|\phi|0\rangle)^\dagger D^\mu \langle 0|\phi|0\rangle)$. Lesen Sie M_W^2 ab. Welche Linearkombination von W_3 und B entspricht dem Z-Boson?
- Der Zusammenhang zwischen Masseneigenfeldern Z, A (Z^0-Boson und Photon) und W_3, B ist durch die orthogonale Transformation

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\text{W}} & -\sin\theta_{\text{W}} \\ \sin\theta_{\text{W}} & \cos\theta_{\text{W}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen dem Weinbergwinkel θ_{W} auf der einen Seite und den Kopplungen g und g' auf der anderen Seite. Lesen Sie weiters M_Z^2 ab. Was erhalten Sie für M_W/M_Z?
- Drücken Sie die kovariante Ableitung (in allgemeiner Form) durch die Masseneigenfelder $W^\pm, Z, A$ aus. Lesen Sie den Zusammenhang zwischen e, g und dem Weinbergwinkel ab.
- Man erhält den vollständigen Ausdruck für $\mathcal{L}_\phi$ in der unitären Eichung, wenn man den kinetischen Term für das Higgsfeld h hinzufügt und die eben erhaltenen Massenterme der Vektorbosonen mit dem Faktor $(1 + h/v)^2$ multipliziert. Schreiben Sie $\mathcal{L}_\phi$ an. Lesen Sie die Feynmanregel für den Vertex W^+W^-h ab.

19.16. Higgspotential

- Ermitteln Sie die Minimumsbedingung für das Higgspotential

$$V(\phi) = -r\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \qquad r, \lambda > 0.$$

- Verwenden Sie

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad v > 0,$$

  um den Zusammenhang zwischen v, λ und r herzustellen.
- Drücken Sie das Higgspotential (in der unitären Eichung) durch h, λ und v aus. Lesen Sie die Higgsmasse ab.
- Lesen Sie die Feynmanregel für den h^4-Vertex ab.

19.17. Wie groß ist der gemessene Wert der Higgsmasse?

19.18. Drücken Sie die Selbstkopplungen der Vektorbosonen durch die Masseneigenfelder $W^\pm$, Z^0 und A aus.

19.19. Schreiben Sie jene Yukawakopplungen an, aus denen man nach spontaner Symmetriebrechung die Massenmatrizen der geladenen Leptonen erhält. Erläutern Sie, wie man die entsprechenden Masseneigenfelder und deren Kopplungen an das Higgsfeld erhält.

19.20. Schreiben Sie jene Yukawakopplungen an, aus denen man nach spontaner Symmetriebrechung die Massenmatrizen der Quarks mit Ladung $2/3$ erhält. Erläutern Sie, wie man die entsprechenden Masseneigenfelder und deren Kopplungen an das Higgsfeld erhält.

19.21. Schreiben Sie jene Yukawakopplungen an, aus denen man nach spontaner Symmetriebrechung die Massenmatrizen der Quarks mit Ladung $-1/3$ erhält. Erläutern Sie, wie man die entsprechenden Masseneigenfelder und deren Kopplungen an das Higgsfeld erhält.

19.22. Schreiben Sie jenen Teil $\mathcal{L}_{\mathrm{cc}}$ der Lagrangedichte des Standardmodells an, der die Kopplung des geladenen schwachen Stroms an die W-Bosonen beschreibt. Drücken Sie $\mathcal{L}_{\mathrm{cc}}$ durch die Masseneigenfelder der Quarks und Leptonen aus. Erklären Sie, wie die Quark-Mischungsmatrix (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix) zustande kommt.

19.23. Wieviele *physikalische* Parameter treten in der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix auf? Erläutern Sie Ihre Antwort.

19.24. Schreiben Sie jenen Teil $\mathcal{L}_{\mathrm{nc}}$ der Lagrangedichte des Standardmodells an, der die Kopplung des neutralen schwachen Stroms an das Z^0-Boson beschreibt. Drücken Sie $\mathcal{L}_{\mathrm{nc}}$ durch die Masseneigenfelder der Quarks und Leptonen aus. Erklären Sie den Glashow-Iliopoulos-Maini-Mechanismus.

19.25. Wie wirkt eine CP-Transformation auf ein Diracfeld $\psi(x^0, \vec{x})$?

19.26. Schreiben Sie das invariante Matrixelement für den Zerfall $\mu^- \to \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ an (Baumgraphennäherung).

20. Zerfallsbreite

20.1. Wie lautet der Zusammenhang zwischen dem invarianten Matrixelement und der Zerfallsbreite bei einem n-Teilchen-Zerfall?

20.2. Schreiben Sie das invariante Matrixelement für den Zerfall $\mu^- \to \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ an (Baumgraphennäherung).

20.3. Berechnen Sie die Zerfallsbreite von $W^+ \to \nu_\ell \ell^+$ in Baumgraphennäherung ($m_\nu = 0$).

20.4. Berechnen Sie die Zerfallsbreite von $W^+ \to ud$ in Baumgraphennäherung ($m_u = m_d = 0$). Beachten Sie den Farbfaktor!

21. Minimale Subtraktion

21.1. Beschreiben Sie das Verfahren, wie man zu einer Größe X, welche in dimensionaler Regularisierung einen einfachen Pol bei $d = 4$ besitzt, X_{reg} im $\overline{\text{MS}}$-Schema erhält.

21.2. Beschreiben Sie das Verfahren, wie man zu einer aus einer L-Schleifen-Rechnung erhaltenen Größe X den dazugehörigen Ausdruck für X_{reg} im $\overline{\text{MS}}$-Schema erhält.

21.3. Berechnen Sie

$$\Delta(0) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}$$

mit Hilfe der dimensionalen Regularisierung und ermitteln Sie $\Delta(0)_{\text{reg}}$ im $\overline{\text{MS}}$-Schema.

22. Laufende Kopplung und laufende Masse

22.1. Der Zusammenhang zwischen der physikalischen und der nackten Masse in der φ^4-Theorie ist in Einschleifennäherung durch

$$m_{\text{ph}}^2 = m^2 - \frac{i\lambda}{2}\Delta(0) + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

gegeben. Ermitteln Sie die laufende Masse $m_{\text{ren}}^2(\mu)$.

23. Renormierungsgruppe

23.1. Die Störungsreihe für die β-Funktion der φ^4-Theorie lautet

$$\beta(\lambda) = \beta_0 \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} + \beta_1 \frac{\lambda^3}{(4\pi)^4} + \ldots .$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung, dass die Koeffizienten $\bar{a}_L$ in der Beziehung

$$\lambda_{\text{ren}} = \lambda_{\text{ph}} \left[1 + \bar{a}_1 \frac{\lambda_{\text{ph}}}{(4\pi)^2} + \bar{a}_2 \frac{\lambda_{\text{ph}}^2}{(4\pi)^4} + \ldots \right]$$

Polynome vom Rang L in der Variablen $t = \ln(\mu/m_{\text{ph}})$ sind:

$$\bar{a}_L = \bar{a}_{L,0} t^L + \bar{a}_{L,1} t^{L-1} + \ldots + \bar{a}_{L,L}.$$

Zeigen Sie weiters, dass der führende Term durch

$$\bar{a}_{L,0} = (\beta_0)^L$$

gegeben ist.

23.2. Berechnen Sie eine Näherungslösung der Renormierungsgruppengleichung

$$\mu \frac{d}{d\mu} \lambda_{\text{ren}}(\mu) = \beta(\lambda_{\text{ren}}(\mu))$$

für $\beta(\lambda) \simeq \beta_0 \lambda^2/(4\pi)^2$. Welche physikalische Bedeutung hat die dabei auftretende Integrationskonstante?