Übungen zu T2, Sommersemester 2016, Blatt 2

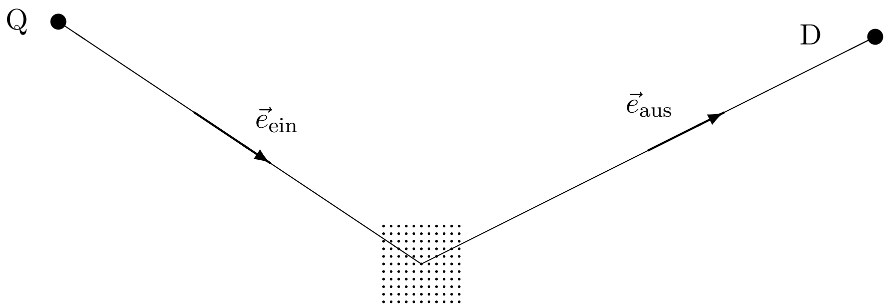
1) de Broglie-Wellenlängen

Berechnen Sie die de Broglie-Wellenlänge eines Protons mit einer kinetischen Energie von 1 eV, 100 eV, 100 keV ($m_p \simeq 938\,\mathrm{MeV}/c^2$). Wie groß ist die de Broglie-Wellenlänge eines Menschen mit einer Masse von 70 kg, der sich mit $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ bewegt? Welche Schlussfolgerung können Sie ziehen, wenn Sie die Ergebnisse mit der Größe des Protons bzw. des Menschen vergleichen?

2) De Broglie-Wellenlänge nichtrelativistischer Teilchen

Geben Sie die allgemeine (relativistische) Beziehung zwischen der de Broglie-Wellenlänge und der **kinetischen Energie** $T = E - mc^2$ eines massiven Teilchens ($m \neq 0$) an. Bestimmen Sie eine Näherungsformel für den nichtrelativistischen Grenzfall ($T \ll mc^2$).

3) Neutronenstreuung



An den Punkten $\vec{x}_{\vec{n}} = a\vec{n}$, $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$, $n_i = -N, -N+1, \ldots, N$ ($i = 1,2,3$) befinden sich die Atome eines Kristallgitters. Von einer am Punkt $\vec{x}_{\mathrm{Q}} = -R_{\mathrm{Q}}\,\vec{e}_{\mathrm{ein}}$ ($|\vec{e}_{\mathrm{ein}}| = 1$) befindlichen Quelle Q ($R_{\mathrm{Q}} \gg Na$) werden Neutronen mit dem Impuls p emittiert. Am Punkt $\vec{x}_{\mathrm{D}} = R_{\mathrm{D}}\,\vec{e}_{\mathrm{aus}}$ ($|\vec{e}_{\mathrm{aus}}| = 1$) befindet sich ein Neutronendetektor ($R_{\mathrm{D}} \gg Na$). Die Amplitude $\langle \mathrm{D\,aus} | \mathrm{Q\,ein} \rangle$, dass das bei Q emittierte Neutron im Detektor D nachgewiesen wird, ist von der Form

$$\langle \mathrm{D\,aus} | \mathrm{Q\,ein} \rangle \sim \sum_{\vec{n}} \frac{e^{ip|\vec{x}_{\mathrm{Q}} - \vec{x}_{\vec{n}}|/\hbar}}{|\vec{x}_{\mathrm{Q}} - \vec{x}_{\vec{n}}|} W_{\vec{n}} \frac{e^{ip|\vec{x}_{\mathrm{D}} - \vec{x}_{\vec{n}}|/\hbar}}{|\vec{x}_{\mathrm{D}} - \vec{x}_{\vec{n}}|}.$$

(Mehrfachstreuung wird vernachlässigt.) Berechnen Sie diesen Ausdruck unter der Annahme, dass $W_{\vec{n}}$ für alle Atome gleich ist. Verwenden Sie für $|\vec{x}_{\mathrm{Q}} - \vec{x}_{\vec{n}}| = \sqrt{(\vec{x}_{\mathrm{Q}} - \vec{x}_{\vec{n}})^2}$ eine Näherungsformel, die der Tatsache Rechnung trägt, dass $|\vec{x}_{\mathrm{Q}}| = R_{\mathrm{Q}} \gg |\vec{x}_{\vec{n}}|$ ist.

(Analog für $|\vec{x}_\mathrm{D} - \vec{x}_{\vec{n}}|$.) Auf diese Weise sollten Sie den Ausdruck

$$\langle \mathrm{D\,aus}|\mathrm{Q\,ein}\rangle \sim \sum_{\vec{n}} e^{ipa\vec{\Delta}\cdot\vec{n}/\hbar} = \prod_{i=1}^{3} \sum_{n_i=-N}^{N} e^{ipa\Delta_i n_i/\hbar}, \quad \vec{\Delta} = \vec{e}_\mathrm{ein} - \vec{e}_\mathrm{aus}$$

erhalten. Man muss also eine geometrische Reihe vom Typ

$$s(\alpha) = \sum_{n=-N}^{N} e^{i\alpha n}$$

berechnen. Zeigen Sie, dass die Summation

$$s(\alpha) = \frac{\sin \alpha(N + \frac{1}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

ergibt. Diskutieren Sie das Verhalten dieser Funktion. Für welche Werte von α hat sie scharfe Extrema? Zeigen Sie, dass man daher bei der Neutronenbeugung an dem Kristall für

$$\frac{pa}{2\pi\hbar}\vec{\Delta} = \vec{\nu} \in \mathbb{Z}^3$$

scharfe Interferenzmaxima beobachtet. Das ist die Lauesche Interferenzbedingung für ein einfaches kubisches Gitter. Man kann sie auch in der Form

$$\frac{a}{2\pi}\left(\vec{k}_\mathrm{ein} - \vec{k}_\mathrm{aus}\right) = \vec{\nu} \in \mathbb{Z}^3$$

schreiben.