41. Betrachten Sie die Lagrangefunktion zweier Massenpunkte mit Gravitationsanziehung. Ermitteln Sie die Euler-Lagrangegleichungen und transformieren sie diese in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten. Ermitteln Sie diese Gleichungen auch direkt in Bezug auf die durch Schwerpunkts- und Relativkoordinaten ausgedrückte Lagrangefunktion (vergleichen Sie mit Bsp. 19).

42. Betrachten Sie die Lagrangefunktion eines N-Teilchensystems von Massenpunkten mit Gravitationsanziehung. Zeigen Sie, dass $\vec{x}_i \longmapsto \vec{y}_i^{\varepsilon}(\vec{x}) = \vec{x}_i + \varepsilon\vec{x}_0, \quad i = 1, ...N$ eine Symmetrietransformation darstellt und berechnen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße.

43. Betrachten Sie die Lagrangefunktion $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}\, g_{ab}(\vec{x})\, \dot{x}_a \dot{x}_b - U(\vec{x}), \quad a, b = 1, 2, 3$$

wo $g_{ab}(\vec{x})$ für jedes $\vec{x}$ eine positiv definite, symmetrische Matrix ist.

(a) berechnen Sie $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c}$

**HINWEIS:** Vereinfachen Sie das Ergebnis durch Umbenennung von Indices und wegen der Symmetrie von $g_{ab}$.

(b) berechnen Sie $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c}$

(c) berechnen Sie $\frac{\partial L}{\partial x_c}$

(d) bilden Sie die Euler-Lagrangegleichungen

**HINWEIS:**

i. Vereinfachen Sie das Ergebnis durch Umbenennung von Indices und mittels Heraushebens von $\dot{x}_b \dot{x}_d$.

ii. verwenden Sie $2\frac{\partial g_{cb}}{\partial x_d}\dot{x}_b\dot{x}_d = (\frac{\partial g_{cb}}{\partial x_d} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x_b})\dot{x}_b\dot{x}_d$.

(e) Bringen Sie die Euler-Lagrangegleichungen durch Linksmultiplikation mit ${g^{-1}}_{ac}$ in die folgende Form

$$\ddot{x}_a + \Gamma_{a;bd}\, \dot{x}_b \dot{x}_d = -{g^{-1}}_{ac}\, \frac{\partial U}{\partial x_c}.$$

Hier gilt

$${g^{-1}}_{ac}(\vec{x})\, g_{cb}(\vec{x}) = \delta_{ab}$$

und es wurden die sogenannten Christoffel - Symbole $\Gamma_{a;bd}$ verwendet

$$\Gamma_{a;bd} = {g^{-1}}_{ac}\, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{cb}}{\partial x_d} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x_b} - \frac{\partial g_{bd}}{\partial x_c}\right).$$

44. Bestimmen Sie die Lagrangeschen Multiplikatoren für das ebene Pendel im konstanten Gravitationsfeld in kartesischen Koordinaten. Es liegen 2 Zwangsbedingungen vor: $f_1 = x_2, \quad f_2 = x_1^2 + x_3^2 - R^2$.

45. Lösen Sie (näherungsweise für kleine Auslenkungen) die Bewegungsgleichungen für das ebene Pendel im konstanten Gravitationsfeld in adaptierten Koordinaten.