36. Zeigen Sie, dass sich die Lagrangefunktion eines geladenen Teilchens unter Einfluss eines veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldes

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^{\,2} - q\,\Phi(\vec{x}, t) + q\,\frac{\dot{\vec{x}}}{c}\,\vec{A}(\vec{x}, t)$$

unter den Transformationen

$$\vec{A}(\vec{x}, t) \to \vec{A}'(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{\nabla}\lambda(\vec{x}, t)$$

$$\Phi(\vec{x}, t) \to \Phi'(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\lambda(\vec{x}, t)$$

um ein totales Zeitdifferential einer Funktion (welcher?) verändert. Hier ist $\lambda(\vec{x}, t)$ eine partiell nach $\vec{x}, t$ differenzierbare beliebige Funktion. Man nennt diese Transformationen Eichtransformationen. Zeigen Sie, dass das elektrische und magnetische Feld unter Eichtransformationen unverändert bleiben.

37. Eine relativistische Lagrangefunktion für ein einzelnes Teilchen, auf das eine konservative geschwindigkeitsunabhängige Kraft wirkt, lautet

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = -m\,c^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^{\,2}}{c^2}} - U(\vec{x})$$

Ermitteln Sie die Euler-Lagrange Gleichungen. Wie lauten die verallgemeinerten Impulse? Entwickeln Sie die Lagrange Funktion und die verallgemeinerten Impulse für kleine Geschwindigkeiten und diskutieren Sie die Terme. Lösen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für den Fall $U(\vec{x}) = 0$.

38. Die Multiplikation der Lagrange Funktion mit einem beliebigen konstanten Faktor ändert die Euler-Lagrange Gleichungen nicht. Betrachten Sie die Skalentransformationen

$$\vec{x}_a \longrightarrow \vec{x}'_a = \alpha\,\vec{x}_a, \quad t \longrightarrow t' = \beta\,t$$

Sei für ein $N-$Teilchensystem ein Potential $U(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$ vorliegend, das

$$U(\vec{x}'_1, \ldots, \vec{x}'_N) = \alpha^k\,U(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$$

erfüllt.

(a) Bestimmen Sie β derart, dass die Lagrangefunktion der gestrichenen Variablen bis auf einen konstanten Faktor mit der Lagrangefunktion der ungestrichenen Variablen übereinstimmt.

(b) Wie lauten die k-Werte für den Fall von harmonischen Kräften sowie im Falle der Gravitationskraft ?

39. Vergleichen Sie für Lösungen der Euler-Lagrange Gleichungen des obigen $N-$Teilchensystems Zeiten und Längen vor bzw. nach einer Skalentransformation

    (a) Beweisen Sie
    $$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2}$$

    (b) Zeigen Sie für den harmonischen Oszillator, dass die Schwingungsdauer von der Amplitude unabhängig ist.

    (c) Leiten Sie für den Fall der Gravitationskraft das 3. Keplersche Gesetz her.

40. Eine Lagrange Funktion habe die Form
    $$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}, t) + \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t}$$
    wo $f(\vec{x}, t)$ eine beliebige differenzierbare Funktion ist.

    (a) Berechnen Sie die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung und zeigen Sie, dass diese für jede beliebige Funktion $\vec{x}(t)$ erfüllt ist. Deuten Sie dieses Ergebnis.

    (b) Zeigen Sie, dass jeder Diffeomorphismus $\vec{x} \longrightarrow \vec{y}^{\,\varepsilon}(\vec{x})$, mit $\vec{y}^{\,\varepsilon=0}(\vec{x}) = \vec{x}$, eine Symmetrietransformation bildet. Wieso sind trivialerweise nur Konstante die einzigen Erhaltungsgrößen?
    Hinweis: Schreiben Sie $\vec{y}^{\,\varepsilon}(\vec{x}) = \vec{x} + \varepsilon\, \vec{g}(\vec{x}, t) + O(\varepsilon^2)$.