Übungen zu M2, WS 12/13, M. Könenberg

Aufgabe 31:(Aufgabe zählt doppelt)
Wir betrachten partielle Differentialgleichungen auf $\mathbb{R}^2$.

(a) Wie lautet der Laplace-Operator in Polarkoordinaten (ohne Beweis). Zeigen Sie mit Hilfe des Testfunktionen-Formalismus, dass $(2\pi)^{-1}\ln(r)$ eine Greensfunktion des Laplace-Operators ist. Stellen Sie die Lösung ϕ von $\Delta\phi = f$ in kartesischen Koordinaten als Faltung dar, falls f eine Schwartzfunktion ist.

(b) Lösen Sie die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten mit Hilfe des Produktansatz.

(c) Stellen Sie die innere und die äußere Lösung von $\Delta\phi = 0$ zu der Randbedingung $\phi(1,\varphi) = f(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi[$ als Reihe dar. Wie lauten die Entwicklungskoeffizienten ?

(d) Berechnen Sie die innere Lösung der Laplace-Gleichung zu den Randwerten $f(\varphi) = \sin^2(\varphi)$.

(e) Eine Funktion h heißt harmonisch auf $\mathbb{R}^2$, falls $\Delta h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist. Zeigen Sie, dass für analytische Funktionen g, welche auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ definiert sind, Real- und Imaginärteil jeweils harmonisch sind.
(Nutzen Sie Ihr Wissen aus der Vorlesung M1)

Aufgabe 32:
Wir betrachten die eindimensionale Wämeleitungsgleichung:

$$(\partial_t - \partial_x^2)\phi(t,x) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

(a) Finden Sie Lösungen mit Hilfe des Produktansatzes.

(b) Finden Sie ein Lösung ϕ, welche $\phi(0,x) = f(x)$ erfüllt für ein vorgegebenes, 2π-periodisches f. (z.B. eine kreisförmiger Drahtring)

(c) Zeigen Sie für die Lösung aus b), dass $\int_0^{2\pi} \phi(t,x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx$ für alle $t \geq 0$. Wie lautet der Limes $\lim_{t\to\infty} \phi(t,x)$?

(d) Berechnen Sie die Lösung im Fall von $f(x) = \sin^2(x)$