# Übungen zu M2, WS 12/13, M. Könenberg

**Aufgabe 21:** Zeigen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} P_{n-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos(\alpha)) = \frac{1}{2\sin(\alpha/2)}, \quad 0 < \alpha < 2\pi$$

gilt.

**Aufgabe 22:** Berechnen Sie die erzeugenden Funktion der assoziierten Legendre-Polynome, indem Sie zeigen, dass

$$\frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{(1-x^2)^{m/2}}{(1-2xt+t^2)^{(2m+1)/2}} = \sum_{n=m}^{\infty} P_n^m(x) t^{n-m}$$

gilt.

**Aufgabe 23:** Seien $L > 0$ und $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die $\varrho(x) = 0$ erfüllt, wenn $\|x\| \geq L$. Sei

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varrho(x')}{|x-x'|} d^3x'.$$

Leiten Sie mit den Formeln aus der Vorlesung für die Legendre-Polynome und die Kugelfunktionen folgende Entwicklung her

$$\Phi(R,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{c_{\ell,m}}{R^{\ell+1}} Y_\ell^m(\theta,\phi), \quad R > L.$$

dabei ist $x = x(R,\theta,\phi)$ in Kugelkoordinaten und

$$c_{\ell,m} = \frac{4\pi}{2\ell+1} \int_0^{\infty} dr\, r^{\ell+2} \int_0^{\pi} d\vartheta \sin(\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, \overline{Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)} \varrho(r,\vartheta,\varphi),$$

dabei ist $x' = x'(r, \vartheta, \varphi)$ in Kugelkoordinaten.

**Aufgabe 24:** Mit der Notation aus Aufgabe 23. Zeigen Sie: Falls $\varrho$ radialsymmetrisch ist, also $\varrho(x) = \varrho(|x|)$ gilt, folgt

$$\Phi(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \varrho(x') d^3x'}{|x|}$$

für $|x| \geq L$. Berechnen Sie die Entwicklung von $\Phi$ für $\varrho_1, \varrho_2$ und $\varrho_3$, wobei

$$\varrho_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, \quad \varrho_2(x) = \begin{cases} x_1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, \quad \varrho_3(x) = \begin{cases} x_1\, x_3, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases},$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ und $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ ist.