

## Übungen zu T2, Sommersemester 2012, Blatt5

### 31) Leiteroperatoren

Die Leiteroperatoren eines eindimensionalen harmonischen Oszillators  $a, a^\dagger$  erfüllen die Vertauschungsrelation  $[a, a^\dagger] = 1$ . Zeigen Sie:

- (a)  $[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$
- (b)  $[a, f(a^\dagger)] = f'(a^\dagger)$  Hinweis: Betrachten Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion  $f$ .

### 32) Kohärenter Zustand

Der kohärente Zustand  $|z\rangle$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) eines harmonischen Oszillators ist durch  $a|z\rangle = z|z\rangle$  definiert. Zeigen Sie, dass die Lösung dieser Gleichung durch

$$|z\rangle = C e^{z a^\dagger} |0\rangle$$

gegeben ist. Hinweis: Verwenden Sie die in Aufgabe 31 (b) angegebene Formel.

### 33) Entwicklung nach Energieeigenzuständen

Schreiben Sie den kohärenten Zustand  $|z\rangle$  als Linearkombination der normierten Energieeigenzustände  $|n\rangle$  des harmonischen Oszillators.  $\langle n|z\rangle = ?$  Bestimmen Sie den Normierungsfaktor  $C$  (abgesehen von einem willkürlich wählbaren Phasenfaktor  $e^{i\alpha}$ ) durch die Normierungsbedingung  $\langle z|z\rangle = 1$ .

### 34) Poissonverteilung

Die Poissonverteilung ist durch  $p(n; \lambda) = e^{-\lambda} \lambda^n / n!$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) definiert.

- (a) Überprüfen Sie die Normierungsbedingung  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n; \lambda) = 1$ .
- (b) Berechnen Sie die charakteristische Funktion  $\phi(t) = \langle e^{itn} \rangle$ .
- (c) Die Erwartungswerte  $\langle n^k \rangle$  können mit Hilfe der charakteristischen Funktion bestimmt werden.
- (d) Berechnen Sie  $\langle n \rangle$ ,  $\langle n^2 \rangle$  und  $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ .

### 35) Wahrscheinlichkeit den Energieeigenwert $E_n$ zu messen

Überzeugen Sie sich davon, dass die Wahrscheinlichkeiten  $|\langle n|z\rangle|^2$  einer Poissonverteilung gehorchen. Was impliziert dies für  $\langle z|N|z\rangle$ ,  $\langle z|N^2|z\rangle$  und  $\Delta N$ ? ( $N = a^\dagger a$ )

### 36) Erwartungswerte und Unschärfen von Ort und Impuls

Berechnen Sie die Erwartungswerte und Schwankungsquadrate des Orts- und Impulsoperators in dem kohärenten Zustand  $|z\rangle$ .

Hinweis: Drücken Sie  $X$  und  $P$  durch  $a$  und  $a^\dagger$  aus:

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger), \quad P = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}i(a^\dagger - a)$$

### 37) Zeitentwicklung eines kohärenten Zustands

Ein harmonischer Oszillator befinde sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  in dem kohärenten Zustand  $|\psi(0)\rangle = |z\rangle$ . Bestimmen Sie den Zustandsvektor

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle, \quad H|n\rangle = \hbar\omega(n + 1/2)|n\rangle$$

des harmonischen Oszillators zum Zeitpunkt  $t$  und geben Sie die Erwartungswerte und Schwankungen von Ort und Impuls an.

Hinweis:  $|\psi(t)\rangle$  ist ebenfalls ein kohärenter Zustand.

### 38) Distributionen

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der folgenden Funktionen im Distributionssinn ( $\theta(x)$  ist die Heavisidesche Stufenfunktion).

$$\theta(x), \theta(-x), |x| = -x\theta(-x) + x\theta(x), e^{-a|x|} = e^{ax}\theta(-x) + e^{-ax}\theta(x), \quad a > 0.$$

### 39) Deltapotential

Die Wellenfunktion eines Teilchens mit einem Freiheitsgrad habe die Form

$$\psi(x) = \mathcal{N} \exp(-a|x|), \quad a > 0.$$

Überzeugen Sie sich mit Hilfe des Resultats von Aufgabe 38, dass die Wellenfunktion  $\psi(x)$  für eine geeignete Wahl des Parameters  $a$  ein Bindungszustand des Hamiltonoperators

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \lambda \delta(x), \quad (\lambda > 0)$$

ist. Wie ist  $a$  zu wählen? Was ergibt sich für den Energieeigenwert  $E$ ? Gibt es weitere Bindungszustände?

### 40) Transmissions- und Reflexionskoeffizient

Bestimmen Sie für das Potential der vorigen Aufgabe den Durchlässigkeits- und den Reflexionskoeffizienten durch Lösung der Eigenwertgleichung von  $H$  für Energien  $E > 0$ . Skizzieren Sie die Abhängigkeit der beiden Koeffizienten von der Energie  $E$ . Wie groß ist die zeitliche Verschiebung eines Wellenpakets beim Passieren des Potentials? Ist das Vorzeichen plausibel?