Beispiele für die Übungen zu Theoretische Physik für das Lehramt L2
Blatt 7

R. A. Bertlmann, M. Höld, P. Köhler, M. Reisenbauer

WS 2011/12

33) Gegeben sei der Hamiltonoperator für den harmonischen Oszillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

Der Vernichtungs- und Erzeugungsoperator sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} a &:= \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}} (m\omega x + ip) \\ a^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}} (m\omega x - ip) \end{aligned}$$

a) Berechne die Kommutatoren $[a, a], [a^\dagger, a^\dagger], [a, a^\dagger], [N, a], [N, a^\dagger]$, wobei $N = a^\dagger a$ der Besetzungszahloperator ist.

b) Zeige, dass H geschrieben werden kann als

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

c) Was ist das Resultat von $[N, H]$

34) Berechne die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(x)$ des harmonischen Oszillators über die definierende Eigenschaft des Absteigeoperators: $a\ \psi_0(x) = 0$, d.h. setze für a die x-Darstellung ein und löse die Differentialgleichung.

35) Zeige, wenn $|n\rangle$ der Eigenzustand zu N mit dem Eigenwert n ist, dann ist $a|n\rangle$ der Eigenzustand zum selben Operator mit dem Eigenwert $(n - 1)$ und berechne $a|n\rangle$.

36) Berechne die Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p$ für die Zustände des harmonischen Oszillators $|n\rangle$. *Hinweis:* Berechne die Erwartungswerte: $\langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p^2 \rangle$, indem du x und p durch die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren (siehe Bsp 33)) ausdrückst.

37) Berechne das Minimum des Erwartungswertes $\langle H \rangle$ (sprich: die minimale Energie) für den harmonischen Oszillator, gegeben durch den Hamilton-Operator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

mit Hilfe der Abschätzung aus der Heisenberg'schen Unschärferelation:

$$\langle x^2 \rangle \cdot \langle p^2 \rangle \ \geq \frac{\hbar^2}{4}$$