Übungen zu T2 Quantenmechanik im SS 2011

Aufgabe 29

a) Konstruieren Sie eine Funktion $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ derart, dass $xf(x)$ nicht in $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ist.
b) Konstruieren Sie eine differenzierbare Funktion $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ derart, dass df/dx nicht in $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ ist.

Aufgabe 30

Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Werte einer Serie von Messungen der Observablen A. Der Mittelwert von A sei als das Mittel der Messwerte definiert. Zeigen Sie, dass der Mittelwert von A^2 stets größer gleich dem Quadrat des Mittelwerts von A ist. Verifizieren Sie dieselbe Ungleichung für die quantenmechanischen Erwartungswerte.

Aufgabe 31

Berechnen Sie die Schwankung ΔH der Energie eines freien Teilchens im Zustand, der durch die Wellenfunktion aus Aufgabe 26 beschrieben wird.

Aufgabe 32

Verifizieren Sie die folgenden Eigenschaften des Kommutators:
a) $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$,
b) $[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$,
c) die *Jacobi-Identität* $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

Aufgabe 33

Zeigen Sie formal: Wenn die selbstadjungierten Operatoren A und B vertauschen, dann existiert ein vollständiges Orthonormalsystem von gemeinsamen Eigenvektoren der Operatoren.

Aufgabe 34

a) Welche Gleichung muss ein Zustand ψ erfüllen, der das Unschärfeprodukt der Observablen A und B minimiert?
b) Lösen Sie diese Gleichung für den Fall $A = \hat{x},\ B = \hat{p}$.

Aufgabe 35

Angeregte H-Atome kehren nach einer mittleren Lebensdauer von $10^{-8}s$ in den Grundzustand zurück und emittieren dabei je ein Photon der ungefähren Wellenlänge $\lambda = 10^{-7}m$. Bestimmen Sie die relative Linienbreite $\Delta\lambda/\lambda$ dieser Strahlung.

Aufgabe 36

a) Zeigen Sie durch Reihenentwicklung

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]] + \cdots$$

b) Die Operatoren A und B mögen mit ihrem Kommutator kommutieren. Zeigen Sie unter Verwendung von a), dass dann der Operator $Y(t) := e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}[A,B]}$ die Differentialgleichung $\frac{dY}{dt} = (A+B)Y$ erfüllt, und schließen Sie daraus, dass $e^A e^B = e^C$ mit $C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \cdots$ (*Baker-Campbell-Hausdorff-Formel*), wobei die höheren Terme nur dann verschwinden, wenn $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.

Aufgabe 37

a) Zeigen Sie, dass in einem stationären Zustand $\langle [A,H] \rangle = 0 \; \forall A$.

b) Setzen Sie $A = \sum \hat{x}_i \hat{p}_i$ und folgern Sie aus a) den *Virialsatz*

$$2\langle T \rangle = \langle \sum \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} V(\hat{\vec{x}}) \rangle,$$

wobei T den Operator der kinetischen Energie bedeutet.