Übungen zur Theoretischen Physik II: Quantenmechanik I, SS 2010

Prof. Dr. R.A. Bertlmann, S. Arroyo Camejo, B.Sc.

Blatt 4

13) A, B seien zwei Operatoren, die auf den Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ wirken. Der Erwartungswert des Operators A für den Zustand $|\psi\rangle$ sei durch $\langle A\rangle := \langle\psi|A|\psi\rangle$ gegeben. Beweisen sie die folgenden Relationen:

   a) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

   b) $A = A^\dagger \Rightarrow \langle A\rangle \in \mathbb{R}$

   c) $A = B^\dagger B \Rightarrow \langle A\rangle \geq 0$

   c) $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$

   d) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobi-Identität)

14) a) Zeigen Sie

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}\,[A, [A, B]] + \ldots \text{ (Baker-Hausdorff Formel)}\,, \quad (1)$$

wobei

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n\,.$$

   b) Beweisen Sie

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}, \quad \text{für } [[A, B], A] = [[A, B], B] = 0\,.$$

Hinweis: Differenzieren Sie die Funktion $f(\lambda) = e^{A\lambda}e^{B\lambda}$ nach λ, verwenden Sie die Baker-Hausdorff Formel (1), integrieren Sie danach die erhaltene Gleichung und setzen Sie letztlich $\lambda = 1$.

15) a) Zeigen Sie, dass der Ortsoperator X, der Impulsoperator P und der Hamiltonoperator H (mit *reellem* Potential $V(X)$) hermitesch sind (eindimensionaler Fall).

   b) Zeigen Sie, dass der Kommutator von hermitischen Operatoren antihermitisch ist.

16) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert des Impulsoperators $\langle P \rangle := \langle \psi | P | \psi \rangle$ gegeben ist durch

$$\langle P \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, p \left| \tilde{\psi}(p) \right|^2 ,$$

wenn der Zustand $|\psi\rangle$ durch das Wellenpaket

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \tilde{\psi}(p)\, e^{\frac{i}{\hbar} p x}$$

gegeben ist. *Hinweis*: Verwenden Sie die Dirac'sche Deltafunktion mit den Eigenschaften

$$\delta(p - p') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')x} \quad \text{und}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp'\, \delta(p - p') f(p') = f(p) .$$