Übungen zu T3 Elektrodynamik im WS 2009

Aufgabe 20

Sei α der Winkel zwischen den durch die Polarkoordinaten (θ, ϕ) und (θ', ϕ') definierten Richtungen.

a) Drücken Sie $cos\alpha$ durch Winkelfunktionen dieser Polarkoordinaten aus.

b) Beweisen Sie

$$P_l(cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Setzen Sie zuerst $\theta = 0$ und verallgemeinern Sie dann unter Ausnützung der Rotationsinvarianz der Summe. Diese folgt aus dem Transformationsverhalten $Y_{lm}(R(\theta, \phi)) = U_{mm'} Y_{lm'}(\theta, \phi)$, wo R eine Rotation und U eine unitäre Matrix ist. Begründen Sie dieses Transformationsverhalten.

Aufgabe 21

Der l-te Term der Multipolentwicklung in der Elektrostatik hat die allgemeine Form

$$\frac{t_{i_1 \ldots i_l} x_{i_1} \ldots x_{i_l}}{r^{2l+1}}.$$

Zeigen Sie, dass der Zähler selbst die Laplace-Gleichung löst und $t_{i_1 \ldots i_l}$ ein total symmetrischer spurfreier Tensor ist, d.h. $t_{..i..j..} = t_{..j..i..}$ und $\delta_{ij} t_{ij\ldots} = 0$.

Optional: Zeigen Sie direkt, dass $t_{i_1 \ldots i_l}$ $2l+1$ unabhängige Komponenten hat.

Aufgabe 22

Erschließen Sie aus Aufgabe 21 die allgemeine Form der kartesischen Multipolmomente l-ter Ordnung einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ und beweisen Sie: Verschwinden alle Multipolmomente der Ordnung $< l$, dann sind die Multipolmomente der Ordnung l translationsinvariant.

Aufgabe 23

Konstruieren Sie aus Punktladungen die einfachste Anordnung, die asymptotisch ein reines 2^l-Pol-Feld erzeugt

a) explizit für $l = 0, 1, 2, 3,$

b) durch Induktion für $l > 3$.

Aufgabe 24

Geben Sie die Ladungsdichte eines allgemeinen Punktmultipols der Ordnung l an.