Übungen zu T2, SS 2009, Blatt 5

25) Der Hamilton-Operator des einfachen harmonischen Oszillators mit Frequenz ω ist gegeben durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \, . \tag{1}$$

Wir definieren nun die Leiteroperatoren

$$a = \tfrac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega x + ip) \quad \text{und} \quad a^\dagger = \tfrac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega x - ip)$$

a) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\, a \, , \, a \,]$, $\left[\, a^\dagger \, , \, a^\dagger \,\right]$ und $\left[\, a \, , \, a^\dagger \,\right]$.

b) Benutzen Sie das Ergebnis von a) um zu zeigen, dass sich der Hamilton-Operator aus (1) ausdrücken lässt als

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + \tfrac{1}{2})$$

c) Berechnen Sie $[\, N \, , \, H \,]$, wo $N = a^\dagger a$.

Hinweis: Verwenden Sie die kanonischen Kommutatorrelationen für x und p,

$$[\, x \, , \, p \,] = i\hbar \, .$$

26) Der Zustand $|\, n \,\rangle$ sei ein Eigenzustand von N mit Eigenwert n. Zeigen Sie, dass $a^\dagger \,|\, n \,\rangle$ und $a \,|\, n \,\rangle$ Eigenzustände von N mit Eigenwerten $n+1$ bzw. $n-1$ sind.

Hinweis: Berechnen Sie erst $[\, a \, , \, N \,]$ und $\left[\, a^\dagger \, , \, N \,\right]$.

27) Der Zustand $|\, 0 \,\rangle$ sei definiert über die Relation $a \,|\, 0 \,\rangle = 0$. Was ist der Energieeigenwert von $|\, 0 \,\rangle$? Wie könnte man aus $|\, 0 \,\rangle$ andere Eigenzustände von H gewinnen?

28) Berechnen Sie die folgenden Größen für den Zustand $|\, n \,\rangle$ in Abhängigkeit von n, m und ω indem Sie x und p durch die Operatoren a und $a^\dagger$ ausdrücken.

a) $\langle\, x \,\rangle$, $\langle\, x^2 \,\rangle$

b) $\langle\, p \,\rangle$, $\langle\, p^2 \,\rangle$

c) Δx, Δp, $\Delta x \Delta p$

Hinweis: Die Zustände $\{|\, n \,\rangle\}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.

29) Zwei identische harmonische Oszillatoren in einer Dimension, jeweils mit Masse m und Frequenz ω, sowie mit Koordinaten x_1 und x_2, seien durch eine Wechselwirkung Cx_1x_2 gekoppelt. Der Hamilton-Operator des Gesamtsystems ist also gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_1^2 + p_2^2\right] + \frac{m\omega^2}{2}\left[x_1^2 + x_2^2\right] + Cx_1x_2$$

Finden Sie die exakten Energieeigenwerte dieses gekoppelten Systems.

Hinweis: Führen Sie Schwerpunkts- und Relativkoordinaten, sowie die entsprechenden Impulse ein, um das System zu entkoppeln und drücken Sie das Problem durch Leiteroperatoren aus.