Übungen zu T2, SS 2009, Blatt 1

1) Betrachten Sie die freien ($\vec{j} = 0$, $\rho = 0$) Maxwell-Gleichungen,

$$\vec{\nabla}\,\vec{E} = 0 \;\;,\; \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \;\;,\; \vec{\nabla}\,\vec{B} = 0 \;\;, \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

oder die Wellengleichungen der elektromagnetischen Felder

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E} = 0 \;\;,\;\; \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{B} = 0$$

Zeigen Sie, dass das Wellenpaket

$$\vec{f}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} f(x_1,t) \\ f(x_2,t) \\ f(x_3,t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(x_i,t) = \int dk\, F(k)\, e^{i(k_i x_i - \omega t)}$$

eine Lösung dieser Wellengleichungen darstellt, mit $c\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = \omega$.

2) Die Koeffizientenfunktion des Wellenpakets aus Beispiel 1 ist durch die Fouriertransformation des Wellenpakets gegeben. Es gilt (in einer Dimension)

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, f(x)\, e^{-ikx} \;\;,\; f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, F(k)\, e^{ikx}$$

Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte einer Gauß'schen Verteilung mit Breite σ

$$f(x,t) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{-(x-ct)^2}{4\sigma^2}}$$

eine Gauß'sche Verteilung mit Breite $\frac{1}{\sigma}$ ist.

3) Betrachten Sie nun das Resultat von Beispiel 2 im Grenzfall $\sigma \to \infty$ und machen Sie plausibel, dass die Fouriertransformierte der Identität die Dirac'sche Deltafunktion ergibt.

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} = \delta(x) \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, \delta(x) = f(0)$$

4) Zeigen Sie

$$\int dx\, |f(x)|^2 = \int dk\, |F(k)|^2$$

unter Verwendung der Fouriertransformation aus Beispiel 3.

5) Zeigen Sie, dass $\frac{d}{dx} f(x)$ die Fouriertransformierte von $ikF(k)$ ist.

6) Die Varianz (oder auch Unschärfe) Δx bzw. Δk einer Funktion im Orts- bzw. Impulsraum ist gegeben durch

$$\Delta x = \frac{\int dx\, x^2 |f(x)|^2}{\int dx\, |f(x)|^2} \quad \text{bzw.} \quad \Delta k = \frac{\int dk\, k^2 |F(k)|^2}{\int dk\, |F(k)|^2}$$

Zeigen Sie das für jede analytische Funktion $F(k)$:

$$\Delta x\, \Delta k \geq 1$$

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse der Beispiele 4 und 5 und anschließend die Schwartz'sche Ungleichung. Nehmen sie auch an das alle Integralen well-definiert und eindig sind und $f(\pm\infty) = 0 = F(\pm\infty)$.

Was sind die Konditionen für ein Gleichheit (i.e. $\Delta x \Delta k = 1$)?