Quantenmechanik II

SS 2009 **6. Aufgabenblatt**

27. Betrachte einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit Frequenz ω_0. Für $t < 0$ sei der Oszillator im Grundzustand. Für $t > 0$ wirkt ein Potential

$$W(t) = F_0 \cdot X \cdot e^{-t/\tau}.$$

(a) Berechne in erster Ordnung Störungstheorie die Wahrscheinlichkeit, den Oszillator im ersten angeregten Zustand zu finden. Zeige, daß für $t \gg \tau$ die Wahrscheinlichkeit unabhängig von t wird.

(b) Diskutiere auch den Übergang zu höheren angeregten Zuständen. [Hinweis: $\langle n'|X|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(\sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1} + \sqrt{n}\,\delta_{n',n-1})$.]

28. Verifiziere, daß $a^*(\varphi)^* = a(\varphi)$ und $[a(\varphi), a(\psi)]_\pm = [a^*(\varphi), a^*(\psi)]_\pm = 0$.

29. Ein d-dimensionaler, isotroper, harmonischer Oszillator ist durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{P}^2 + \omega^2\mathbf{Q}^2)$$

definiert, wobei $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_d)$, $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_d)$ den Vertauschungsrelationen

$$[Q_j, P_k] = \mathrm{i}\;\delta_{jk}$$

genügen. Schreibe den Hamiltonoperator mittels Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und diskutiere die entsprechende Fockraum-Struktur des Hilbertraums. Was ändert sich bei einem anisotropen Oszillator?

30. Sei k ein Operator auf dem 1-Teilchenraum $\mathcal{H}_1$, K die "zweite Quantisierung" von k und $|i\rangle$ eine ON Basis in $\mathcal{H}_1$. Zeige, dass

$$K = \sum_{i,j} a_i^* \langle i|k|j\rangle a_j.$$

31. Sei $w(x, x')$ ein Wechselwirkungspotential für zwei Teilchen. Die entsprechende Wechselwirkung auf dem N-Teilchenraum ist durch

$$W = \sum_{i<j}^{N} w(x_i, x_j)$$

definiert. Zeige, dass der Operator als

$$W = \frac{1}{2}\int\int \Psi^*(x)\Psi^*(x')w(x, x')\Psi(x')\Psi(x)dxdx'$$

geschrieben werden kann, wo $\Psi^*(x)$ bzw $\Psi(x')$ Erzeugungs- bzw Vernichtungsoperatoren sind.