Quantenmechanik II

SS 2009 **2. Aufgabenblatt**

7. (i) Bestimme das Spektrum des Operarors

$$(A\psi)(x) = (\sin x)\psi(x)$$

auf $L_2(\mathbb{R}, dx)$

(ii) Bestimme den Spektralprojektor $E([0, 1/2])$ für diesen Operator.

(iii) Bestimme das Spektrum von $-\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ auf $L(\mathbb{R}^3, d^3\mathbf{r})$.

(iv) Drücke den Spektralprojektor $E = E([0, 1])$ für $-\nabla^2$ durch einen Integraloperator aus, d.h. bestimme $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ so dass

$$E\psi(\mathbf{r}) = \int K(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'.$$

(Hinweis für (iii) und (iv): Fouriertransformation!)

8. Berechne die Eigenwerte und ihre Vielfachheiten für die matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Für $\theta \in [0, 2\pi]$ sei

$$A(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

und

$$|\theta\rangle := \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

(i) Berechne den Erwartungswert von $A(\theta_1) \otimes A(\theta_2)$ in dem verschränkten Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\{|0\rangle \otimes |\pi/2\rangle - |\pi/2\rangle \otimes |0\rangle\}.$$

(ii) Zeige, daß für eine geeignete Wahl von θ_1, θ_1', θ_2, θ_2' der Erwartungswert von

$$A(\theta_1) \otimes A(\theta_2) - A(\theta_1') \otimes A(\theta_2) + A(\theta_1) \otimes A(\theta_2') + A(\theta_1') \otimes A(\theta_2')$$

in dem Zustand (i) den Wert $2\sqrt{2}$ hat.

(iii) Zeige, daß für beliebige reelle Zahlen $a_1, a_1', a_2, a_2' \in [-1, 1]$ stets die Ungleichung

$$|a_1 a_2 - a_1' a_2 + a_1 a_2' + a_1' a_2'| \leq 2$$

gilt. Diskutiere das Ergebnis von (ii) im Lichte dieser Tatsache.

10. Sei $R(\theta)$ die 3×3 Matrix, die einer Drehung um den Winkel θ um die z-Achse entspricht. Verifiziere, daß

$$(U(\theta)\psi)(\mathbf{r}) = \psi(R(\theta)^{-1}\mathbf{r})$$

eine unitäre, einparametrige Gruppe auf $L_2(\mathbb{R}^3, d^3\mathbf{r})$ definiert, und berechne deren infinitesimalen Generator.

11. Seien A und B selbstadjungierte Operatoren, so daß $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$.

(i) Zeige, daß $[e^{iA}, B] = i[A, B]e^{iA}$.

(ii) Zeige, daß $e^{iA}e^{iB} = e^{iA+iB-\frac{1}{2}[A,B]}$.

(Hinweis: Benutzte (i) und betrachte die Differentialgleichung, die $G(t) = e^{itA}e^{itB}$ erfüllt. Es soll angenommen werden, daß Definitionsbereiche unproblematisch sind.)