Quantenmechanik II

SS 2009 **1. Aufgabenblatt**

1. Sei

$$\psi(x) = (\text{const.})e^{-|x|/a}$$

die Wellenfunktion eines Teilchens in einer Dimension (a = Konstante > 0). Berechne:
(i) Die Unschärfen $(\Delta x)_\psi$ und $(\Delta p)_\psi$.
(ii) Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[-a, a]$ vorzufinden.
(iii) Die Wahrscheinlichkeit, den Impuls im Intervall $\left[-\frac{\hbar}{a}, \frac{\hbar}{a}\right]$ vorzufinden.

2. Für den Hamiltonoperator $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ auf der Halbgeraden $\mathbf{R}_+$ mit

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } 0 < x \leq x_0 \\ 0 & \text{für } x_0 < x \end{cases}$$

(V_0 ist eine Konstante > 0) bestimme man den niedrigsten Energieeigenwert.
(i) Für den Fall einer Dirichlet-Randbedingung bei $x = 0$, d.h. $\psi(0) = 0$.
(ii) Für den Fall einer Neumann-Randbdingung bei $x = 0$, d.h. $\psi'(0) = 0$.

3. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechne e^{itA} nach zwei Methoden:
(i) Durch die Reihe

$$e^{itA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itA)^n}{n!}.$$

(ii) Schreibe $A = \sum_{k=1}^{2} \lambda_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ mit $\langle\psi_k|\psi_\ell\rangle = \delta_{k\ell}$ und benutze

$$e^{itA} = \sum_{k=1}^{2} e^{it\lambda_k} |\psi_k\rangle\langle\psi_k|.$$

4. Seien L_x, L_y, L_z die drei Komponenten des Drehimpulsoperators. berechne die Eigenwerte von

$$AL_z^2 + B(L_x^2 + L_y^2),$$

wo A, B Konstanten sind. (Hinweis: Benutze die aus QM I bekannten Resultate ueber die gemeinsamen Eigenvektoren von L_z und $\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$.)

5. Zeige, daß das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in einem Hilbertraum durch die Norm $\|\cdot\|$ eindeutig bestimmt ist, d.h. drücke $\langle\psi, \varphi\rangle$ als Linearkombination von Normen geeigneter Vektoren

aus.
[Hinweis: Es handelt sich hier um eine Verallgemeinerung der Identität $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$ für reele Zahlen a, b.]

6. Sei H der Hamiltonoperator eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit Frequenz ω und $X(t) = e^{itH/\hbar}\, X\, e^{-itH/\hbar}$, wo X der Ortsoperator ist. Berechne den Kommutator

$$[X(t_1), X(t_2)].$$

[Hinweis: Drücke X durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren a^* und a aus und berechne zunächst $e^{itH}\, a\, e^{-itH}$.]