15. Zeigen Sie

- $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!$, wo $(2n+1)!!=(2n+1)(2n+-1)\ldots 3\times 1$ für $n\in\mathbb{N}$.
- für die sphärische Besselfunktion $j_l(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2r}}J_{l+\frac{1}{2}}(r)$ gilt:

$$j_l(r)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{r^{l+2k}}{k!2^k(2l+2k+1)!!}$$

16. Sei die Funktion $f(x)\geq 0$ so dass $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=1$. Zeigen Sie mittels Testfunktion

$$\lim_{n\to\infty}nf(nx)=\delta$$

wo δ die Dirac'sche Deltafunktion ist.

17. Gegeben sei

$$f(x)=\left\{\begin{array}{c}4x \text{ für } x\geq 0\\ x \text{ für } x<0\end{array}\right.$$

Berechnen Sie f'' im Distributionssinn mittels Testfunktion.

18. Beweisen Sie mittels Testfunktion, dass

$$\sin x.\delta'=-\delta$$

19. Beweisen Sie mittels Testfunktion

$$\mathcal{F}g'=ix\mathcal{F}g$$

und berechnen Sie $\mathcal{F}\delta'''$.

20. Zeigen Sie mittels Testfunktion, dass für $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

$$\Delta\ln r=2\pi\delta^2$$

Wie lautet daher die Greenfunktion des Laplace Operators, bzw. die Lösung der Poissongleichung im $\mathbb{R}^2$?

21. Zeigen Sie mittels Testfunktion, dass für $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

$$\Delta\frac{e^{\pm i\mu r}}{r}=-4\pi\delta^3-\mu^2\frac{e^{\pm i\mu r}}{r}$$