1. Berechnen Sie die allgemeine Lösung von

$$y' = \sqrt{y}$$

Diskutieren Sie das Verhalten der allgemeine Lösung in Abhängigkeit von der Wahl der Integrationskonstanten: Beachten Sie sorgfältig den Definitions- und Wertebereich jeder Lösungskurve. Fertigen Sie eine Skizze der Schar der Lösungskurven an.

2. Lösen Sie die obige Differentialgleichung für

- $y(0) = 1$ (eindeutige Lösung)
- sowie für $y(0) = 0$ (zwei Lösungen)

Diskutieren Sie den Eindeutigkeitssatz.

3. Berechnen Sie die Lösung von

$$(y')^2 + y^2 = 1,\ y(0) = 1.$$

Hinweis:

(a) Lösen Sie die Gleichung explizit nach y' auf, machen Sie Fallunterscheidungen!

(b) ein weitere - die sogenannte *singuläre* Lösung - erhält man aus den Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left((y')^2 + y^2 - 1\right) = 0,\ \ (y')^2 + y^2 - 1 = 0.$$

4. Bestimmen Sie die Lösung von

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0 \text{ für } x(0) = 0 \text{ und } \dot{x}(0) = 1.$$

5. Lösen Sie

$$\ddot{x} + x = \cos t \text{ wo } x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.$$

6. Bestimmen Sie (näherungsweise) mittels Reihenansatzes um $x_0 = 0$ eine Lösung y_1 von

$$\ddot{y} - xy = 0$$

Diese Differentialgleichung benannt nach Sir George Airy (1801-1892), tritt bei Problemen der Brechung von Licht- und Radiowellen auf.

7. Bestimmen Sie mittels Frobeniusreihenansatzes um $x_0 = 0$ Lösungen von

$$xy' + \left(1 + x^2\right) y = 0$$

Insbesondere:

(a) Für welche Werte von ρ kann eine Lösung der Form existieren?

(b) Man bestimme die Lösungen, für die $a_0 = 1$ gilt.

(c) Welche Funktion wird durch die verallgemeinerte Potenzreihe dargestellt? (Hinweis: Die Gleichungist auch durch Trennung der Veränderlichen lösbar.)