Klassische Mechanik

(Theoretische Physik 1)

WS 2007/8

Gerhard Ecker

Fakultät für Physik
Universität Wien

Version: Jänner 2008

Inhaltsverzeichnis

Danksagung

Ich danke Helmut Neufeld und Gabriele Uchida für zahlreiche Korrekturen und Verbesserungsvorschläge.

Lehrbücher

J. Honerkamp und H. Römer, Klassische Theoretische Physik, Springer Verlag, Berlin, 1989
T. Fließbach, Mechanik, Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg, 1996
H. Goldstein, C.P. Poole und J.L. Safko, Klassische Mechanik, Wiley-VCH, Weinheim, 2006
L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd. 1: Mechanik, Bd. 6: Hydrodynamik, Verlag H. Deutsch, Frankfurt, 1997
F. Scheck, Mechanik, Springer Verlag, Berlin, 1996
V.I. Arnol'd, Mathematische Methoden der klassischen Mechanik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988
W. Thirring, Lehrbuch der Mathematischen Physik, Bd. 1, Klassische dynamische Systeme, Springer Verlag, Wien, 1988

I Struktur der Physik

I.1 Methodik

Galilei: gezielte Fragestellung an die Natur (Experiment)

Ziel: Erkennen von Zusammenhängen (Gesetzmäßigkeiten) in der Vielfalt der Phänomene

Arbeitsteilung

Experiment	Theorie
direkte Untersuchung phys. Phänomene	Konstruktion von (math.) Modellen $\longrightarrow$
Überprüfung theor. Vorhersagen	empirisches Material sichten und ordnen
Entdeckung neuer Phänomene	Zusammenhänge herstellen $\Rightarrow$ Vorhersagen

Math. Formalismus: unerlässliches Gerüst für die Theoretische Physik, erleichtert Erkennen von Strukturen und Gemeinsamkeiten, beseitigt unnötigen Ballast („Kopf frei für tatsächliche Probleme“).

Modellcharakter der (Theor.) Physik

Abbild der Wirklichkeit in math. Sprache
Kriterium: Widerspruchsfreiheit statt wahr/falsch
Vorhersagekraft: Modell muss im Prinzip durch Experiment widerlegbar sein
$\rightarrow$ Darwinismus der Ideen (Modelle): Änderung, meist Erweiterung des Modells notwendig
$\rightarrow$ sukzessive Approximation statt „endgültiger“ Theorie [T(heory)O(f)E(verything)]

Beispiele:

i. Gravitationsgesetz (Newton) $\longrightarrow$ Allgemeine Relativitätstheorie (Einstein)

ii. Nichtrelativistische Mechanik ($v \ll c$) $\longrightarrow$ Spezielle Relativitätstheorie (T3)

iii. Klassische Mechanik $\longrightarrow$ Quantenmechanik (T2)

iv. Unterscheidung zwischen Teilchen und Wellen aufgehoben in der Quantenfeldtheorie (Elektronfeld, Photon, ...)

Arbeitsweise: Methode der Abstraktion (Idealisierung)

a. Homogenität und Isotropie des Raumes $\longrightarrow$ Vektorcharakter der Newtonschen Gesetze (allg.: Tensorgleichungen)

b. Inertialsysteme $\longrightarrow$ Galileisches Relativitätsprinzip

c. Zwei-Körper-Problem

d. Punktteilchen $\longrightarrow$ starre Körper $\longrightarrow$ ideale Flüssigkeiten $\longrightarrow$ reale Flüssigkeiten

„Ästhetik“:

Einfachheit, „Schönheit“ der fundamentalen physikalischen Gesetze keine absoluten Erfolgsrezepte; „Schönheit“ oft a posteriori festgestellt $\longrightarrow$ Primat des Experiments

$$\boxed{\textbf{Theoretische Physik} \neq \textbf{Mathematik}}$$

Ziel: Gesetzmäßigkeiten statt Sammlung von Kuriositäten

I.2 Fundamentale Wechselwirkungen

Triumph der modernen Physik: alle physikalischen Phänomene im Prinzip auf 4 fundamentale Kräfte oder Wechselwirkungen zurückzuführen

Makroskopische Kräfte	Kernkräfte
Gravitation	starke Wechselwirkung
Elektromagnetismus	schwache Wechselwirkung

Grundlage aller fundamentalen Wechselwirkungen (Gravitation ?):

Relativistische Quantenfeldtheorie (QFT)

T1: klassische Mechanik ist nichtrelativistisch („$c \to \infty$“)
keine Quantentheorie („$\hbar \to 0$“)

Aber: die meisten wesentlichen Begriffe bereits in T1
Lagrange- und Hamiltonformalismus
Symmetrien $\longrightarrow$ Erhaltungssätze
Feldbegriff in Kontinuumsmechanik, fundamentale Bedeutung aber erst in der Elektrodynamik (T3)

Makroskopische Wechselwirkungen

große Reichweite: Kräfte $\sim 1/r^2$; bestimmen alle physikalischen Phänomene mit charakteristischen Distanzen $\gg 10^{-15}$ m $= 1$ fm
für $d \gg 10^{-10}$ m $= 1$ Å : Quantenaspekte meist vernachlässigbar
$\longrightarrow$ Bereich der klassischen Physik

i. Gravitation

1. Vereinheitlichung der Physik: irdische und außerirdische Phänomene vereint im Newtonschen Gravitationsgesetz (Newtons Apfel); Weiterentwicklung zur Allgemeinen Relativitätstheorie durch Einstein; noch keine etablierte QFT (Quant: Graviton)

ii. Elektromagnetismus

2. Vereinheitlichung der Physik (Maxwell): Elektrizität, Magnetismus, Licht verschiedene Manifestationen des elektromagnetischen Feldes

QFT: Q(uanten)E(lektro)D(ynamik) $\longrightarrow$ Quant: Photon
erfolgreichste Theorie der Physik: von astronomischen Distanzen (z.B. intergalaktische Magnetfelder) bis 10^{-18} m (Teilchenbeschleuniger) überprüft

Kernkräfte

relevant für Distanzen $\lesssim 10^{-15}$ m

iii. Starke Wechselwirkung

hält Atomkerne zusammen (gegen elektrische Abstoßung der Protonen)
QFT: Q(uanten)C(hromo)D(ynamik) $\longrightarrow$ Quanten: Gluonen
formuliert für Quarks als Bestandteile von Hadronen (Proton, Neutron, Mesonen, ...)
Gegenstand intensiver Grundlagenforschung

Nobelpreis:	2004	Gross, Politzer, Wilczek („asymptotische Freiheit“ der QCD)

iv. Schwache Wechselwirkung

noch kürzere Reichweite $\sim 10^{-18}$ m, verantwortlich für β-Zerfall ($n \to p\ e^-\ \overline{\nu}_e$)
3. Vereinheitlichung der modernen Physik: Elektromagnetismus und schwache Wechselwirkung $\longrightarrow$ Elektroschwache Wechselwirkung (Standardmodell der Teilchenphysik)
QFT: zusätzlich zu Photonen noch $W^{\pm}, Z$-Bosonen (CERN 1983)

Nobelpreise:	1979	Glashow, Salam, Weinberg (grundlegende Ideen)
	1984	Rubbia, van der Meer (Entdeckung W, Z)
	1999	’t Hooft, Veltman (math. Formulierung der QFT)

I.3 Aufbau der Vorlesung

Newtonsche Mechanik: Kinematik (Bewegungslehre) und Dynamik (Einwirkung von Kräften), Punktteilchen, 2-Körper-Problem, Streuung

Lagrangesche Mechanik: Zwangskräfte, Lagrangefunktion, Hamiltonsches Prinzip, Symmetrien und Erhaltungssätze, Nichtinertialsysteme

Kleine Schwingungen: harmonischer Oszillator, Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen, äußere Kräfte und Green-Funktion

Starrer Körper: endliche Ausdehnung, Eulersche Winkel, Kreiselgleichungen

Hamiltonsche Mechanik: Hamiltonfunktion, Phasenraum, kanonische Transformationen, Hamilton-Jacobi-Gleichung, dynamische Systeme

Kontinuumsmechanik: Übergang zum Kontinuum, elastische Medien, Verzerrungs- und Spannungstensor, elastische Wellen, ideale und reale (zähe) Flüssigkeiten

II Newtonsche Mechanik

II.1 Kinematik und Newtonsche Gesetze

materielle Körper idealisiert als Massenpunkte

Bühne der Punktmechanik:

$$\boxed{\text{3-dim. reeller euklidischer Raum } E^3}$$

Menge von (Massen-)Punkten, die durch Vektoren verbunden sind ($\rightarrow$ Vektorraum V^3), für die ein euklidisches Skalarprodukt definiert ist.
Homogenität und Isotropie des Raumes (Idealisierung!) berücksichtigt: kein Punkt und keine Richtung bevorzugt

Bezugssystem: Angabe eines Ursprungs $O \in E^3$

Koordinatensystem: Ursprung O und 3 linear unabhängige Basisvektoren $\vec{e}_i$

einfachste Wahl:

kartesisches (rechtshändiges) Orthonormalsystem mit Skalarprodukt $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

$\longrightarrow$ jeder Massenpunkt P durch Vektor $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ im KS $(O, \vec{e}_i)$ festgelegt:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i =: x_i \vec{e}_i \qquad \text{(Einsteinsche Summenkonvention)}$$

x_i: kartesische Koordinaten von P im gewählten KS

weiterer Massenpunkt Q: $\quad \vec{s} = y_i \vec{e}_i$
Skalarprodukt: $\quad \vec{r} \cdot \vec{s} = \vec{s} \cdot \vec{r} = x_i \vec{e}_i \cdot y_j \vec{e}_j = x_i y_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = x_i y_j \delta_{ij} = x_i y_i$

Abstand zwischen 2 beliebigen Massenpunkten P, Q:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}$$

Bewegung eines Massenpunkts P: $\quad \overrightarrow{OP} = \vec{r}(t) \quad$ als Funktion der Zeit t $(t \in \mathbb{R})$

Def. der Zeit: durch einen periodischen Vorgang charakterisiert $\longrightarrow$ Festlegung eines Messverfahrens mittels einer „Uhr“
genaueste Uhren: Atomuhren (Atomfrequenzen äußerst stabil) $\longrightarrow$

Def.: 1 Sekunde = 9192631770fache der Periodendauer des Übergangs zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands von ^{133}Cs

Längendefinition über die Lichtgeschwindigkeit:

$$c = 299792458 \text{ m s}^{-1} \qquad \text{(per Def. exakt)}$$

Geschwindigkeit: $\quad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) =: \vec{v}(t)$

Beschleunigung: $\quad \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{v}}(t) =: \vec{a}(t)$

1. Newtonsches Axiom

> Es existieren Bezugssysteme mit einer universellen Zeit t (Inertialsysteme), in denen ohne Einwirkung von Kräften **alle** Punktteilchen konstante Geschwindigkeiten $\vec{v}_a (a = 1, \ldots, N)$ haben ($\longrightarrow \vec{a}_a = \vec{0}$): geradlinig, gleichförmige Bewegung

2.Idealisierung der Punktmechanik: Existenz von Inertialsystemen
Annäherung: Erde, frei fallender Aufzug (Raumschiff), Sonnensystem, Fixsternsystem

Übung: kräftefreie Bewegung in einem Nichtinertialsystem

Folgerung: wenn **ein** IS existiert $\longrightarrow$ jedes gleichförmig dazu bewegte BS (Ursprung O') ist ebenfalls ein IS

$$\overrightarrow{O'O} = \vec{V}_0 t + \vec{R}_0 \; , \qquad \dot{\vec{V}}_0 = \dot{\vec{R}}_0 = \vec{0}$$

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} \; , \qquad \vec{r}\,'(t) = \overrightarrow{O'P}$$

$$\vec{r}\,'(t) = \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \vec{r}(t) + \vec{V}_0 t + \vec{R}_0$$

$$\boxed{\text{(spezielle) Galilei-Transformation}}$$

$$\longrightarrow \ddot{\vec{r}}\,'(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \quad \leftrightarrow \quad \vec{a}\,' = \vec{0}$$

seien $(O, \vec{e}_i)$ und $(O, \vec{e}_i\,')$ zwei kartesische KS (zunächst $\vec{V}_0 = \vec{R}_0 = \vec{0}$)

lineare Unabhängigkeit $\longrightarrow$

$$\vec{e}_i\,' = D_{ij}\vec{e}_j \qquad i, j = 1, 2, 3 \qquad \text{(Summenkonvention!)}$$

Koordinaten eines Punktes P:

$$\vec{r} = x_k \vec{e}_k = x_j' \vec{e}_j\,'$$

Zusammenhang zwischen x_j' und x_k ?

Orthonormalität:

$$\vec{e}_i\,' \cdot \vec{e}_k\,' = \delta_{ik} = D_{ij}\vec{e}_j \cdot D_{kl}\vec{e}_l = D_{ij}D_{kl}\delta_{jl} = D_{ij}D_{kj}$$

$$\delta_{ik} = D_{ij} D^T_{jk} \quad \leftrightarrow \quad \mathbb{1} = DD^T = D^T D \longrightarrow D^T = D^{-1}$$

Folgerung: D_{ij} sind die Matrixelemente einer orthogonalen Matrix D

<u>Übung:</u>

$$\vec{e}_i = \vec{e}\,'_j D_{ji} \ , \qquad x'_i = D_{ij} x_j$$

analog zu räumlichem Ursprung O auch kein zeitlicher Ursprung ausgezeichnet:

$t' = \varepsilon t + t_0$ in IS$'$ verwendbar ($\varepsilon = \pm 1$)

Raum der Ereignisse $\equiv$ Raum-Zeit (4-dim. affiner Raum)
durch Koordinaten (t, x_i) gekennzeichnet

$\boxed{\text{Allgemeine Galilei-Transformation für Inertialsysteme}}$

IS $\rightarrow$ IS$'$

$$\begin{aligned} x'_i &= D_{ij} x_j + V_{0i} t + R_{0i} \qquad (i = 1, 2, 3) \\ t' &= \varepsilon t + t_0 \end{aligned}$$

<u>Bem.:</u> Interpretation als passive Transformation (P fest, IS $\rightarrow$ IS$'$)

leicht zu zeigen (Übung):

<u>Galilei-Transformationen bilden eine Gruppe (Galilei-Gruppe)</u>

Element der Gruppe: $g \in G$, wobei $g = \{D, \vec{V}_0, \vec{R}_0; \varepsilon, t_0\}$

<u>Gruppeneigenschaften</u>

i. IS $\xrightarrow{g_1}$ IS$'$ $\xrightarrow{g_2}$ IS$''$ $\longrightarrow$ $\exists \ g_{12} = g_2 \circ g_1 \in G$ mit IS $\xrightarrow{g_{12}}$ IS$''$

ii. Assoziativität:

$$g_3 \circ (g_2 \circ g_1) = (g_3 \circ g_2) \circ g_1$$

wegen Assoziativität von Addition und Multiplikation

iii. Einheitselement: $e = \{D = \mathbb{1}, \vec{V}_0 = \vec{0}, \vec{R}_0 = \vec{0}; \varepsilon = 1, t_0 = 0\}$

iv. Inverse Galilei-Transformation: zu jedem $g \ \exists \ g^{-1}$ mit $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

<u>Galileisches Relativitätsprinzip</u>

kein IS ausgezeichnet $\longrightarrow$ Bewegungsgleichungen müssen in allen IS dieselbe Form haben $\equiv$ Bewegungsgleichungen (form)invariant gegenüber Galilei-Transformationen

2. Newtonsches Axiom

für $a = 1, \dots, N$ Massenpunkte in einem IS

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{K}_a(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) \qquad (\text{keine } \textstyle\sum_a)$$

m_a: träge Masse, materielle Eigenschaft des Massenpunkts

2. Newtonsches Gesetz impliziert Def. der trägen Masse: bei geg. Kraft Beschleunigung zweier Körper a_1, a_2 gemessen $\longrightarrow$ $m_2/m_1 = a_1/a_2$; (willkürliche) Wahl der Einheit: 1 kg
Einheit der Kraft: 1 N(ewton) = 1 kg m s^{-2}

Bem.: Gesetz enthält keine Aussage über die Form von $\vec{K}_a$, durch Experiment zu bestimmen, charakterisiert mechanisches System

Impuls: $\vec{p}_a = m_a \vec{v}_a$

allgemeinere Form des 2. Newtonschen Gesetzes (gilt auch für zeitabhängige Massen)

$$\frac{d\vec{p}_a}{dt} = \vec{K}_a$$

3N gewöhnliche Diffgl. 2. Ordnung für 3N Funktionen $\vec{r}_a(t)$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Anfangswertproblem ($\rightarrow$ M1):

bei vorgegebenen Anfangsbedingungen $\vec{r}_{a0} = \vec{r}_a(t = t_0), \vec{v}_{a0} = \vec{v}_a(t = t_0)$ $\exists$ (zumindest für t nahe t_0) eindeutige Vektorfunktionen $\vec{r}_a(t)$ mit diesen Anfangsbedg.

3. Newtonsches Axiom (actio=reactio)

$\vec{K}_{ab}$: Kraft des Körpers b auf Körper a

$$\vec{K}_{ab} = -\vec{K}_{ba}$$

Einschränkungen an $\vec{K}_a$ aus Galilei-Prinzip
für abgeschlossene mechanische Systeme (keine äußeren Einflüsse)

i. Zeitliche Translation: $t' = t + t_0$
da $\dfrac{d^n \vec{r}_a}{dt^n} = \dfrac{d^n \vec{r}_a}{dt'^n}$ $\quad\longrightarrow\quad$ $\vec{K}_a(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N)$ kann nicht explizit von t abhängen

N.B.: nur für abgeschlossenes System gültig!

Häufige Situation: zusammengesetztes System $A \cup B$, wobei nur A bekannt (z.B. Erde) $\longrightarrow$ Einfluss von B (z.B. Mond $\rightarrow$ Gezeiten) durch zeitabhängige Kräfte im Gleichungssystem für A beschrieben

ii. Räumliche Translation: $\vec{r}_a' = \vec{r}_a + \vec{R}_0$

$$\frac{d^n \vec{r}_a'}{dt^n} = \frac{d^n \vec{r}_a}{dt^n} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{K}_a(\vec{r}_b - \vec{r}_c, \dot{\vec{r}}_d)$$

Notation: $\vec{r}_b - \vec{r}_c$ steht für alle möglichen Differenzen der Ortskoordinaten $(b, c = 1, \ldots, N)$, analog für $\dot{\vec{r}}_d$

iii. Spezielle Galilei-Transformation: $\vec{r}_a' = \vec{r}_a + \vec{V}_0 t$

$\ddot{\vec{r}}_a$ und $\vec{r}_b - \vec{r}_c$ ungeändert, $\dot{\vec{r}}_a{}' = \dot{\vec{r}}_a + \vec{V}_0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{K}_a(\vec{r}_b - \vec{r}_c, \dot{\vec{r}}_b - \dot{\vec{r}}_c)$

iv. Rotation:

bisher immer passive Transformationen betrachtet: feste Ortsvektoren $\vec{r}_a$ in durch Transformation verbundenen IS

Aktive Transformation $\longrightarrow$ KS festgehalten, Ortsvektoren transformiert

speziell für Drehung: $\vec{r} \xrightarrow{\text{Drehung}} \vec{r}_D$ mit Koordinaten $x_{Di} = D_{ij} x_j$, wobei D_{ij} wieder Matrixelemente einer orthogonalen Matrix D

Übung (Relation zwischen aktiver und passiver Transformation): welche passive Drehung mit Matrix $D^{(p)}$, also $(O, \vec{e}_i) \xrightarrow{D^{(p)}} (O, \vec{e}_i')$, muss man bei gegebener aktiven Drehung $\vec{r} \xrightarrow{D^{(a)}} \vec{r}_{D^{(a)}}$ durchführen, damit

$$\underbrace{x_{D^{(a)}i}}_{\text{Komp. von } \vec{r}_{D^{(a)}} \text{ in IS}} \quad = \quad \underbrace{x_i'}_{\text{Komp. von } \vec{r} \text{ in IS}'} \qquad ?$$

Forderung aus Galilei-Prinzip:

$$\boxed{\text{Newtonsche Gleichungen forminvariant bei aktiven Drehungen}}$$

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{K}_a(\vec{r}_b, \dot{\vec{r}}_c) \xrightarrow{D} m_a \ddot{\vec{r}}_{aD} = \vec{K}_{aD}(\vec{r}_b, \dot{\vec{r}}_c)$$
$$\longrightarrow \qquad \vec{K}_{aD}(\vec{r}_b, \dot{\vec{r}}_c) = \vec{K}_a(\vec{r}_{bD}, \dot{\vec{r}}_{cD})$$

in Worten:
aktive Drehung von $\vec{K}_a$ muss die ursprüngliche Vektorfunktion in den gedrehten Koordinaten ergeben

Übung: Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = K(r)\vec{e}_1$$

nicht drehinvariant ist, wobei $K(r)$ eine skalare Funktion von $r = |\vec{r}|$ ist. Führen Sie z.B. eine aktive Drehung um die z-Achse um einen Winkel φ aus.

noch einmal: alle diese Einschränkungen gelten nur für abgeschlossene Systeme!

kann durchaus sinnvoll sein, nicht abgeschlossene Systeme zu betrachten
einfachster Fall: ein Teilchen unter dem Einfluss einer äußeren Kraft, die nur von der momentanen Lage des Teilchens abhängt
$\longrightarrow$ Kraftfeld $\vec{K}(\vec{r})$

Beispiele:

1. Konstante Kraft: $\vec{K}(\vec{r}) = \vec{K}_0$

wichtigster Fall: Erdanziehung auf Erdoberfläche $\longrightarrow$ $\vec{K}_0 = m\vec{g}$
Äquivalenzprinzip: schwere Masse (in $\vec{K}_0$) = träge Masse (im 2. Newtonschen Gesetz)
$\vec{g}$: zeigt zum Erdmittelpunkt, Fallbeschleunigung $g = |\vec{g}| \simeq 9.81$ m s^{-2}

Bewegungsgleichung: $\ddot{\vec{r}} = \vec{g}$

alle Körper erfahren die gleiche Erdbeschleunigung, unabhängig von der Masse

allg. Lösung:

$$\vec{r}(t) = \vec{g}\,\frac{t^2}{2} + \vec{c}_1 t + \vec{c}_2$$

mit 2.3N=6 Integrationskonstanten $\vec{c}_1, \vec{c}_2$

Anfangsbedingungen:
$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 = \vec{g}\,\frac{t_0^2}{2} + \vec{c}_1 t_0 + \vec{c}_2$$
$$\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{g}\;t_0 + \vec{c}_1$$

Lösung:
$$\vec{r}(t) = \vec{g}\,\frac{t^2}{2} + (\vec{v}_0 - \vec{g}\;t_0)\;t + \vec{r}_0 - \vec{v}_0\;t_0 + \vec{g}\,\frac{t_0^2}{2}$$

2. Konstante Kraft und Reibungskraft

für nicht zu große $\vec{v}$: $\vec{K}(t) = \vec{K}_0 - c\vec{v}(t)$
$c > 0$: Reibungskraft wirkt der Bewegung entgegen

Vereinfachung: 1-dim. Problem (z-Achse, z.B. Fall einer Kugel in zäher Flüssigkeit)

$$m\ddot{z} = K_0 - c\dot{z}$$

Typ: inhomogene lineare Diffgl. mit konstanten Koeff.
Standardverfahren ($\rightarrow$ M1):

$$z(t) = \underbrace{z_s(t)}_{\text{spezielle Lösung}} + \underbrace{z_h(t)}_{\text{allg. homogene Lösung}}$$

spezielle Lösung leicht zu erraten in diesem einfachen Fall:
(allg. Verfahren: Variation der Konstanten)

$$z_s(t) = \frac{K_0}{c}\;t \qquad (\text{da}\;\; \ddot{z}_s = 0)$$

homogene Gleichung: $m\ddot{z} = -c\;\dot{z}$ oder ($v = \dot{z}$) $\dot{v} = -\dfrac{c}{m}\;v$

allg. homogene Lösung (mit Integrationskonstanten k, bzw. b_1, b_2):

$$\ln v = -\frac{c}{m}\, t + k \quad \longrightarrow \quad v(t) = \exp(-\frac{c}{m}\, t + k) \quad \longrightarrow \quad z_h(t) = b_1 \exp(-\frac{c}{m}\, t) + b_2$$

und daher insgesamt

$$z(t) = b_1 \exp(-\frac{c}{m}\, t) + b_2 + \frac{K_0}{c}\, t$$

Anfangsbed.: $t_0 = 0$ (der Einfachheit halber)

$$z(0) = z_0 = b_1 + b_2$$

$$\dot{z}(0) = v_0 = -\frac{b_1 c}{m} + \frac{K_0}{c}$$

Lösung: $$z(t) = z_0 + \frac{K_0}{c}\, t + \frac{m}{c}\left(\frac{K_0}{c} - v_0\right)\left(\exp(-\frac{c}{m}\, t) - 1\right)$$

Diskussion:

$$t \gg m/c \ \text{(für große Zeiten)} \ : \quad z(t) \simeq z_0 + \frac{K_0}{c}\, t + \frac{m}{c}\left(v_0 - \frac{K_0}{c}\right)$$

$$v(t) \simeq \frac{K_0}{c} =: v_E \qquad \text{Endgeschwindigkeit}$$

$\longrightarrow$ Massenpunkt „vergisst“ Anfangsgeschwindigkeit v_0

Bem.: Ansatz für Reibungskraft nur gültig für nicht zu große Geschwindigkeiten

Übung: $\vec{K}_R = -d\vec{v}|\vec{v}| \qquad (d > 0)$

3. Lineare Kraft: $\vec{K}(\vec{r}) = -c\vec{r} \qquad (c > 0)$

Kraft $\sim$ Auslenkung $\longrightarrow$ harmonischer Oszillator
$\longrightarrow$ Kap. IV (Kleine Schwingungen)

4. Gravitationskraft

2 Massenpunkte: $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ mit Massen m_1, m_2
Relativkoordinate: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\ , \quad r = |\vec{r}|$

$$\underbrace{\vec{K}_{12}}_{\text{Kraft von 2 auf 1}} = -\vec{K}_{21} = -\frac{G_N m_1 m_2}{r^3}\, \vec{r}$$

$G_N \simeq 6.67 \cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$ Newtonsche Gravitationskonstante

analoges Kraftgesetz in der Elektrostatik: Coulomb-Gesetz
$\longrightarrow$ 2-Körper-Problem

Arbeit und Energiesatz

Vor.: Kraftfeld $\vec{K}(\vec{r})$, also nur von $\vec{r}$ abhängig

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}(\vec{r})$$

multiplizieren Bewegungsgleichung skalar mit $\dot{\vec{r}}$ und integrieren über t

linke Seite:

da $m\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}^2$: $\quad m\int_{t_1}^{t_2} dt\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}}^2 = T(t_2) - T(t_1)$

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}\vec{v}^2$$ <u>kinetische Energie</u>

rechte Seite:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\vec{K}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r}\cdot\vec{K}(\vec{r})$$

i.a. abhängig vom Weg C

Wegintegral ($\rightarrow$ Analysis): erfordert Angabe eines Weges C von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$
Weg: Abb. Intervall $[u_1, u_2] \longrightarrow V^3 : \vec{r}(u)$
mit $u_1 \leq u \leq u_2, \quad \vec{r}(u_i) = \vec{r}_i \quad (i = 1, 2)$
Wegintegral unabhängig von der Parametrisierung, z.B. $u = t$, aber i.a. abhängig vom Weg

<u>Arbeit</u>: $\quad A_C(t_1, t_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r}\cdot\vec{K}(\vec{r}) = \int_{t_1}^{t_2} dt\vec{K}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)$

am Teilchen geleistete Arbeit entlang Weg C im Kraftfeld $\vec{K}(\vec{r})$

Einheiten (SI-System): 1 J(oule) = 1 N(ewton)m(eter) = 1 W(att)s(ekunde)

Leistung: $\quad P(t) = \vec{K}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)$

<u>Def.</u>: Vektorfeld (hier Kraftfeld) $\vec{K}(\vec{r})$ heißt konservativ, wenn das Wegintegral nur von den Eckpunkten, aber nicht vom Weg abhängt

offensichtlich: $\quad \vec{K}(\vec{r})$ konservativ $\quad\leftrightarrow\quad \oint d\vec{r}\cdot\vec{K}(\vec{r}) = 0$ für jeden geschlossenen Weg

Bew.: $\quad \oint = \int_{C_1\cup -C_2} = \int_{C_1} + \int_{-C_2} = \int_{C_1} - \int_{C_2}$

Theorem ($\rightarrow$ Analysis): $\vec{K}(\vec{r})$ ist genau dann konservativ, wenn ein skalares Feld (Potenzial) $U(\vec{r})$ existiert, sodass

$$\vec{K}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$$

Folgerung: Potenzial $U(\vec{r})$ nur bis auf Konstante bestimmt

Gradient: skalares Feld $\longrightarrow$ Vektorfeld

in kart. Koordinaten $\quad \vec{\nabla}U(\vec{r}) = \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial x_i}\,\vec{e}_i$

also Vektorfeld mit kartesischen Komponenten $\quad (\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3})$

zeitliche Ableitung: $\quad \frac{dU(\vec{r}(t))}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i}\,\vec{e}_i\cdot\frac{dx_j}{dt}\,\vec{e}_j = \vec{\nabla}U\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$

Folgerung: Arbeit unabhängig vom Weg

$$\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\vec r\cdot\vec K(\vec r) = -\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} d\vec r\cdot\vec\nabla U(\vec r) = -\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d\vec r}{dt}\cdot\vec\nabla U(\vec r) = -\int_{t_1}^{t_2} dt\frac{d}{dt}U(\vec r(t)) = U(\vec r(t_1)) - U(\vec r(t_2))$$

endgültige Bilanz:

$$T(t_2) - T(t_1) = U(\vec r(t_1)) - U(\vec r(t_2))$$

$$\longrightarrow \qquad E = T + U = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^{\,2}(t) + U(\vec r(t)) \qquad \text{zeitunabhängig}$$

$$\boxed{\text{Gesamtenergie = Summe von kinetischer und potenzieller Energie ist erhalten}}$$

Rotation ($\rightarrow$ Analysis): Vektorfeld $\longrightarrow$ Vektorfeld

in kartesischen Koordinaten: $\operatorname{rot}\vec K(\vec r) = \vec\nabla\times\vec K = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial K_k}{\partial x_j}\,\vec e_i$

total antisymmetrischer Tensor ε: durch $\varepsilon_{123} = 1$ festgelegt

wichtige Relation (Überschiebung zweier Indizes): $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$

<u>Satz von Stokes</u> ($\rightarrow$ Analysis): in einfach zusammenhängendem Gebiet ist $\vec K(\vec r)$ genau dann konservativ, wenn $\vec\nabla\times\vec K(\vec r) = \vec 0$

Integralformulierung:

$$\oint d\vec r\cdot\vec K(\vec r) = \int_F d\vec f\cdot\left(\vec\nabla\times\vec K(\vec r)\right)$$

Fläche: Abb. $[u_1,u_2]\times[v_1,v_2] \longrightarrow V^3$

$\vec r(u,v)$ für $u_1\le u\le u_2, v_1\le v\le v_2$

Oberflächenintegral $$\int_F d\vec f\cdot\vec V(\vec r) = \int \underbrace{dudv\left(\frac{\partial\vec r}{\partial u}\times\frac{\partial\vec r}{\partial v}\right)}_{\text{gerichtetes Flächenelement}}\cdot\vec V(\vec r(u,v))$$

unabhängig von Parametrisierung der Fläche

Vektorprodukt (äußeres Produkt) zweier Vektoren $\vec a,\vec b\in V^3$ ($\rightarrow$ Analysis):

in kart. Koordinaten $\vec a\times\vec b = \varepsilon_{ijk}a_jb_k\,\vec e_i$

Basisvektoren: $\vec e_i\times\vec e_j = \varepsilon_{ijk}\,\vec e_k$

zweifaches Vektorprodukt: $\vec a\times(\vec b\times\vec c) = (\vec a\cdot\vec c)\vec b - (\vec a\cdot\vec b)\vec c$

<u>Beispiele für konservative Kraftfelder</u>

<u>i. Konstante Kraft</u>: $\vec K(\vec r) = \vec K_0$

$\longrightarrow \quad U(\vec r) = -\vec K_0\cdot\vec r$

speziell für $\vec K_0 = m\,\vec g \quad \longrightarrow U(\vec r) = -m\,\vec g\cdot\vec r = mgz \qquad$ für $\vec g = (0,0,-g)$

ii. Rotationssymmetrisches Zentralkraftfeld

$$\vec{K}(\vec{r}) = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r} \qquad\qquad r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}^{\,2}} = \sqrt{x_i x_i}$$

mit skalarer Funktion $f(r)$ des Betrags $r = |\vec{r}|$ (daher drehinvariant)

Beh.: Potenzial $U(\vec{r}) = -\int\limits_{r_0}^{r} dr' f(r') = U(r)$

dabei r_0 zunächst willkürlich (Potenzial nur bis auf Konstante bestimmt)

Bew.: mit $\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}$

$$\vec{\nabla} U(r) = \frac{dU}{dr}\,\vec{\nabla} r = -f(r)\,\frac{\vec{r}}{r} = -\vec{K}(\vec{r})$$

Gravitation	$U(r) = -\dfrac{G_N m_1 m_2}{r}$	$\vec{K}(\vec{r}) = -\dfrac{G_N m_1 m_2}{r^3}\,\vec{r}$
harm. Oszillator	$U(r) = \dfrac{c}{2}\,r^2$	$\vec{K}(\vec{r}) = -c\,\vec{r}$

iii. Eindimensionale Bewegung

manchmal restliche Dimensionen (Koordinaten) irrelevant

$$m\ddot{x} = K(x) \quad\longrightarrow\quad U(x) = -\int\limits_{x_0}^{x} dx' K(x')$$

Grund: $\exists$ einziger Weg von x_0 nach x $\longrightarrow$ Kraft stets konservativ

Folgerung: Energieerhaltung erlaubt Lösung der Bewegungsgl. durch einfache Integration

$$E = T + U = \frac{m}{2}\dot{x}^{\,2} + U(x) \qquad \text{konstant}$$

$$v = \dot{x} = \sqrt{\tfrac{2}{m}[E - U(x)]} \qquad \text{(für } v < 0 \text{ umgekehrtes Vorzeichen)}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x')]}} = t - t_0 \qquad \text{mit } x_0 = x(t_0)$$

Integrationskonstanten: x_0, E statt x_0, v_0

Zusammenhang: $E = \dfrac{m v_0^2}{2} + U(x_0)$

wenn $K(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$, meist sinnvolle Wahl der freien Konstante im Potenzial: $U(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$

$T \geq 0 \quad\longrightarrow\quad E \geq U$

$\longrightarrow$ typische Werte E_1, E_2, E_3

Umkehrpunkte: $\quad E = U(x_u) \quad \longrightarrow \quad v_u = 0$

E_1: gebundene (räumlich beschränkte) Bewegung
E_3: ungebundene (unbeschränkte) Bewegung
E_2: je nach Anfangspunkt x_0

iv. Paradebeispiel für nichtkonservative Kraft

Reibungskraft $\quad \vec{K}_R = -c\vec{v} \quad (c > 0)$ (allerdings nicht einmal Kraftfeld)

$$\vec{K}_R \cdot d\vec{r} = -c\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = -c\vec{v}^{\,2} dt < 0$$

$\longrightarrow$ $\oint d\vec{r} \cdot \vec{K}_R < 0$: Energieverlust des Teilchens bei einem Umlauf
$\longrightarrow$ natürlich keine Energieerhaltung

II.2 Systeme von Punktteilchen

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a = \vec{K}_a \qquad a = 1, \ldots, N \qquad (\text{keine } \textstyle\sum_{\text{a}})$$

3 N gewöhnliche Diffgl. 2. Ordnung für $(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \in V^{3N}$ (Konfigurationsraum)

6 N Anfangsbedingungen $\vec{r}_a(t_0), \vec{v}_a(t_0)$
$\longrightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit der Lösung (zumindest lokal)

kinetische Energie des Systems: $\quad T = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2}$

speziell: Kraftfelder $\vec{K}_a(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

$\vec{K}_a(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ konservativ : $\int_C d\vec{r}_a \cdot \vec{K}_a$ wegunabhängig $\quad \leftrightarrow \quad \vec{K}_a = -\vec{\nabla}_a U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

($\vec{\nabla}_a$: bezieht sich auf Massenpunkt mit Ortsvektor $\vec{r}_a$)

Häufiger Fall:

$$\vec{K}_a = \underbrace{\vec{K}_a^{\text{ext}}(\vec{r}_a)}_{\text{äußere Kräfte}} + \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^{N} \underbrace{\vec{K}_{ab}(\vec{r}_a, \vec{r}_b)}_{2-\text{Körper}-\text{Kräfte}}$$

Vor.:

i) $\vec{K}_a^{\text{ext}}$ konservativ $\quad \leftrightarrow \quad \vec{K}_a^{\text{ext}} = -\vec{\nabla}_a V_a^{\text{ext}}(\vec{r}_a)$

ii) $\vec{K}_{ab} = \dfrac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} f_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|)$

$$\vec{K}_{ab} = -\vec{K}_{ba} \quad \leftrightarrow \quad f_{ab} = f_{ba}$$

dann $\exists$ Potenzial des Systems ($\vec{K}_a = -\vec{\nabla}_a U$)

$$U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = \sum_{a=1}^{N} V_a^{\text{ext}}(\vec{r}_a) + \sum_{\substack{a,b=1 \\ a<b}}^{N} V_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|)$$

mit $V_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|) = -\int\limits_{r_0}^{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} dr f_{ab}(r)$

Impulsbilanz und Schwerpunktsbewegung

zur Erinnerung: $\vec{p}_a = m_a\dot{\vec{r}}_a$ Impuls des Teilchens a

Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{a=1}^{N} \vec{p}_a$ Gesamtmasse $M = \sum_{a=1}^{N} m_a$

Def.: Ortsvektor des Schwerpunkts $\vec{R} = \sum_{a=1}^{N} m_a\vec{r}_a/M \longrightarrow \vec{P} = M\dot{\vec{R}}$

Newton: $\dot{\vec{p}}_a = \vec{K}_a^{\text{ext}} + \sum_{b\neq a} \vec{K}_{ab}$ mit $\vec{K}_{ab} = -\vec{K}_{ba}$

$$\longrightarrow \qquad \dot{\vec{P}} = \sum_{a=1}^{N} \dot{\vec{p}}_a = \sum_a \vec{K}_a^{\text{ext}} + \sum_{a\neq b} \vec{K}_{ab} = \sum_a \vec{K}_a^{\text{ext}} + \frac{1}{2}\sum_{a\neq b} \underbrace{\left(\vec{K}_{ab} + \vec{K}_{ba}\right)}_{=\vec{0}}$$

Folgerung:

wenn $\sum_a \vec{K}_a^{\text{ext}} = \vec{0}$, insbesondere also für abgeschlossenes Sytem ($\vec{K}_a^{\text{ext}} \equiv \vec{0}$),

Impulserhaltung: $\dot{\vec{P}} = \vec{0} \longrightarrow \ddot{\vec{R}} = \vec{0}$

$\longrightarrow$ geradlinige, gleichförmige Schwerpunktsbewegung

$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}}{M}t$ und daher $\exists$ IS mit $\vec{R} = \vec{0}$

Abgeschlossenes System

statt $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ System durch Koordinaten $\vec{R}, \vec{d}_1, \ldots, \vec{d}_{N-1}$ beschreiben

$$\vec{d}_a := \vec{r}_a - \vec{R} \quad (a = 1, \ldots, N) \qquad \longrightarrow \qquad \sum_{a=1}^{N} m_a\vec{d}_a = \vec{0}$$

Schwerpunktsbewegung kann in diesem Fall immer abgespalten werden und daher

$$\boxed{N\text{-Teilchen-Problem auf } (N-1)\text{-Teilchen-Problem reduziert}}$$

$\longrightarrow$ Anwendung beim 2-Körper-Problem

N.B.: funktioniert i.a. nicht für $\vec{K}_a^{\text{ext}} \neq \vec{0}$

Drehimpuls

zunächst für einzelnes Punktteilchen (Def. abhängig vom Bezugssystem)

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r}\times\vec{p} = m\,\vec{r}\times\dot{\vec{r}} \\ \longrightarrow \quad \dot{\vec{L}} &= m\,\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}} + m\,\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = \vec{r}\times\vec{K} =: \vec{N} \end{aligned}$$ Drehmoment

Analogie zu Newtonschem Gesetz $\dot{\vec{p}} = \vec{K}$

speziell für Zentralkraft $\vec{K} = \frac{\vec{r}}{r} f(r)$:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{r}\,\frac{f(r)}{r} = \vec{0} \qquad \longrightarrow \qquad \dot{\vec{L}} = \vec{0}$$

Drehimpulserhaltung

System von Massenpunkten

$$\vec{L} = \sum_{a=1}^{N} \vec{L}_a = \sum_{a=1}^{N} \vec{r}_a \times \vec{p}_a$$

$$\dot{\vec{L}} = \sum_a m_a \vec{r}_a \times \ddot{\vec{r}}_a = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{K}_a^{\text{ext}} + \sum_{a \neq b} \vec{r}_a \times \vec{K}_{ab} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{K}_a^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} (\vec{r}_a - \vec{r}_b) \times \vec{K}_{ab}$$

falls $\quad \vec{K}_{ab} \sim \vec{r}_a - \vec{r}_b \qquad \longrightarrow \qquad \dot{\vec{L}} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{K}_a^{\text{ext}} = \sum_a \vec{N}_a^{\text{ext}} =: \vec{N}^{\text{ext}}$

(wie vorher angenommen, z.B. für Gravitation) äußeres Drehmoment

$$\boxed{\text{im abgeschlossenen System ist der Drehimpuls erhalten}}$$

weitergehende Aussage durch Abseparation der Schwerpunktsbewegung

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{a=1}^{N} m_a \vec{r}_a \times \dot{\vec{r}}_a = \sum_{a=1}^{N} m_a \left(\vec{R} + \vec{d}_a\right) \times \left(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{d}}_a\right) \\ &= \underbrace{\vec{R} \times \vec{P}}_{\vec{L}_S} + \underbrace{\sum_{a=1}^{N} m_a \vec{d}_a}_{\vec{0}} \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \underbrace{\sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\vec{d}}_a}_{\vec{0}} + \underbrace{\sum_{a=1}^{N} m_a \vec{d}_a \times \dot{\vec{d}}_a}_{\vec{L}_{\text{rel}}} \end{aligned}$$

$\vec{L}_{\text{rel}}$ ist der auf den Schwerpunkt bezogene Drehimpuls

analog:

$$\vec{N}^{\text{ext}} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{K}_a^{\text{ext}} = \sum_a \left(\vec{R} + \vec{d}_a\right) \times \vec{K}_a^{\text{ext}} = \underbrace{\vec{R} \times \sum_a \vec{K}_a^{\text{ext}}}_{\vec{N}_S} + \underbrace{\sum_a \vec{d}_a \times \vec{K}_a^{\text{ext}}}_{\vec{N}_{\text{rel}}}$$

und daher $\quad \dot{\vec{L}}_S = \dot{\vec{R}} \times \vec{P} + \vec{R} \times \dot{\vec{P}} = M \dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \sum_a \vec{K}_a^{\text{ext}} = \vec{N}_S$

da $\quad \dot{\vec{L}} = \vec{N} \quad$ und $\quad \dot{\vec{L}}_S = \vec{N}_S \quad \longrightarrow \quad \dot{\vec{L}}_{\text{rel}} = \vec{N}_{\text{rel}}$

$$\boxed{\text{im abgeschlossenen System } (\vec{K}_a^{\text{ext}} = \vec{0}) \text{ sind } \vec{L}_S \text{ und } \vec{L}_{\text{rel}} \text{ separat erhalten}}$$

II.3 2-Körper-Problem

abgeschlossenes System für $N = 2$: $\qquad \vec{K}_a^{\text{ext}} = \vec{0} \qquad (a = 1, 2)$

Bewegungsgl. (insbesondere für Massenanziehung):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= f(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= f(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \end{aligned}$$

$\longrightarrow \qquad m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{0} = \dot{\vec{P}}$ Impulserhaltung (bereits bekannt)

$\longrightarrow \qquad \vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0\, t$ Schwerpunktsbewegung

damit 3 von 6 Diffgl. bereits vollständig gelöst

restliche Diffgl. in der Relativkoordinate $\quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{d}_1 - \vec{d}_2$

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{r}} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{1}{\mu}f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

reduzierte Masse: $\quad \mu := \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Eigenschaften: $\quad \mu < m_a \quad (a = 1, 2)$

$\mu = \dfrac{m_1}{2}$ für $m_1 = m_2$

$\mu = m_1\left(1 - m_1/m_2 + O(m_1^2/m_2^2)\right)$ für $m_1 \ll m_2$

<u>Relativbewegung:</u> $\quad \mu\ddot{\vec{r}} = f(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$

Übung: $\quad E = \dfrac{1}{2}\sum_{a=1}^{2} m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} + U(r) = \underbrace{\dfrac{\vec{P}^2}{2M}}_{E_S} + \underbrace{\dfrac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + U(r)}_{E_{\text{rel}}}$

$\longrightarrow E_{\text{rel}} = \dfrac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + U(r)$ separat erhalten

Relativdrehimpuls $\quad \vec{L}_{\text{rel}} = \sum_{a=1}^{2} m_a \vec{d}_a \times \dot{\vec{d}}_a = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

Überprüfung: $\quad \dot{\vec{L}}_{\text{rel}} = \mu\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \mu\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \dfrac{f(r)}{r}\,\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$

da $\vec{r} \cdot \vec{L}_{\text{rel}} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{L}_{\text{rel}} = 0$ und $\vec{L}_{\text{rel}}$ zeitlich konstant

$\longrightarrow \qquad \vec{r}$ und $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ stets in derselben Ebene $\perp\, \vec{L}_{\text{rel}}$

$\vec{r}(t + dt) = \vec{r}(t) + \dfrac{d\vec{r}}{dt}dt + O((dt)^2)$

$dF = \dfrac{1}{2}|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)|dt$

wegen $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$

$\longrightarrow \dfrac{dF}{dt} = \dfrac{1}{2\mu}|\vec{L}_{\text{rel}}|$ zeitlich konstant

$\boxed{\text{Flächensatz (2. Keplersches Gesetz)}}$

$\boxed{\text{Radiusvektor der Relativbewegung überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen}}$

gilt für alle Zentralkraftfelder, nicht nur für Gravitation

Bewegung in Ebene orthogonal auf $\vec{L}_{\text{rel}}$ legt <u>Zylinderkoordinaten</u> nahe

$$x = r\cos\varphi \to \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \to \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\to \dot{\vec{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

im gewählten KS: $\quad \vec{L}_{\text{rel}} = (0,0,l)$ mit $l = \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mu r^2\dot{\varphi} \quad \longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \dfrac{l}{\mu r^2}$

$\longrightarrow$ Umlaufsinn kann sich nicht mit der Zeit ändern: $\text{sgn}(\dot{\varphi}) = \text{sgn}(l) =$ konstant

kinetische Energie:

$$\frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{\mu}{2}r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

Zentrifugalpotenzial

$$E_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) \quad \text{mit} \quad U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$\longrightarrow$ eindim. Problem für $r(t)$ im Potenzial $U_{\text{eff}}(r)$

$$\boxed{\text{2-Körper-Problem ist vollständig integrabel}}$$

Lösung für Anfangsbedingungen $r(t_0) = r_0, \varphi(t_0) = \varphi_0$:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r')\right)}} \quad \longrightarrow \quad r(t)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{l}{\mu}\int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{r^2(t')}$$

$\longrightarrow$ Bahnkurve $\vec{r}(t) = (r(t), \varphi(t))$ mit Integrationskonstanten $r_0, \varphi_0, E_{\text{rel}}, l$

$$\left.\begin{array}{r} E_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2}\dot{r}_0^2 + U_{\text{eff}}(r_0) \\ l = \mu r_0^2\dot{\varphi}_0 \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} r_0, \dot{r}_0 \\ \varphi_0, \dot{\varphi}_0 \end{array}$$

Teilchenbahn: $\quad r(\varphi)$ mit $r(\varphi_0) = r_0$ (ohne Zeitabhängigkeit)

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{\sqrt{2\mu}}{l}r^2\sqrt{E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r)}$$

$$\longrightarrow \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{l}{\sqrt{2\mu}}\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r')}}$$

typisches eff. Potenzial $U_{\text{eff}}(r)$ $\quad$ (Vor.: $\lim\limits_{r\to 0} r^2U(r) = 0$ und $\lim\limits_{r\to\infty} U(r) = 0$)

$E_{\text{rel}} \geq U_{\text{eff}}$
wegen $\dot{r}^2 \geq 0$

$\underline{E_{\text{rel}} = E_1}$: $\quad \dot{r} = 0 \quad \longrightarrow \quad r = r_0 = \text{konstant} \quad (E_1 = U_{\text{eff}}(r_0)) \quad$ Kreisbewegung

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{l}{\mu r_0^2}(t - t_0)$$

$\underline{E_{\text{rel}} = E_2 < 0}$: $\quad r_{\text{min}} \leq r \leq r_{\text{max}}$

Zentrifugalbarriere lässt $r = 0$ nicht zu

Perizentrum (Perihel bei Planeten)

Apozentrum (Aphel bei Planeten)

r oszilliert zwischen r_{min} und r_{max}

mit gleichem Umlaufsinn

($\text{sgn}(\dot{\varphi}) = \text{konstant}$)

$\underline{E_{\text{rel}} = E_3 > 0}$: $\quad r_{\text{min}}$, aber kein r_{max}

Integral für φ $\exists$ für $r \to \infty$ wegen $E_{\text{rel}} > 0$

$$\varphi \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_0 + \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r')}} = \text{konstant}$$

$\underline{\text{Asymptote}}$

Newton: $\quad \ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \dfrac{f(r)}{\mu} \dfrac{\vec{r}}{r} \qquad f(r) \begin{cases} > 0 & \text{Abstoßung} \\ < 0 & \text{Anziehung} \end{cases}$

Abstoßung

$\vec{r} \cdot \vec{a} > 0$
Krümmung weg vom Zentrum

Anziehung

$\vec{r} \cdot \vec{a} < 0$
Krümmung zum Zentrum

$$\Delta\varphi = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r')}}$$

θ: Streuwinkel

$t \to \infty$: $\varphi \to$ konstant, $E_{\text{rel}} \to \frac{\mu}{2} v_\infty^2$

$\longrightarrow$ asymptotisch geradlinig gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeit v_∞

$\boxed{\text{Kepler-Problem}}$

Gravitationspotenzial: $U(r) = -\frac{G_N m_1 m_2}{r} =: -\frac{\kappa}{r}$ $\qquad f(r) = -\frac{\kappa}{r^2}$

selbe Form wie Coulomb-Potenzial, wo zum Unterschied zur Gravitation κ beiderlei Vorzeichen haben kann: $\kappa > 0$ (< 0) Anziehung (Abstoßung)

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{l}{\sqrt{2\mu}} \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E_{\text{rel}} - \frac{l^2}{2\mu r'^2} + \frac{\kappa}{r'}}}$$

Übung: explizite Integration ergibt eine geschlossene Bahn für $E_{\text{rel}} < 0$
d.h.: $r(\varphi = 0) = r(\varphi = 2\pi)$

$\underline{E_{\text{rel}} < 0}$:

Vermutung:

$\exists$ zusätzliche Erhaltungsgröße

Lenz-Runge-Vektor

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \frac{\vec{L}_{\text{rel}}}{\mu} - \frac{\kappa}{\mu} \frac{\vec{r}}{r}$$

Bem. (ohne Beweis): in einem Zentralpotenzial der Form $U(r) = k\,r^n$ sind alle endlichen Bahnen nur für $n = -1$ (Kepler-Problem) und für $n = 2$ (harm. Oszillator) geschlossen

Eigenschaften des Lenz-Runge-Vektors:

i. $\vec{A} \cdot \vec{L}_{\text{rel}} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \vec{A}$ liegt in der Bahnebene

ii. Unter Benützung von $\ddot{\vec{r}} = -\dfrac{\kappa}{\mu r^3}\vec{r}$ und $\dfrac{d}{dt}\vec{r}^2 = 2\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = \dfrac{d}{dt}r^2 = 2r\dot{r}$:

$$\mu\dot{\vec{A}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{L}_{\text{rel}} - \kappa\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2}\right) = -\frac{\kappa}{r^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \frac{\kappa}{r}\dot{\vec{r}} + \frac{\kappa}{r^2}\dot{r}\vec{r} = \frac{\kappa}{r}\left\{-\frac{\vec{r}}{r^2}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}} + \frac{\dot{r}\vec{r}}{r}\right\} = \vec{0}$$

$\longrightarrow \qquad \vec{A}$ konstanter Vektor in der Bewegungsebene

$\vec{A} \cdot \vec{r} = Ar\cos\varphi \qquad A = |\vec{A}|$

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \vec{r}\left[\dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \frac{\kappa}{\mu}\frac{\vec{r}}{r}\right] = (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) - \frac{\kappa}{\mu}r = \frac{l^2}{\mu^2} - \frac{\kappa}{\mu}r$$

$$\longrightarrow \qquad \frac{l^2}{\mu^2} = \frac{\kappa}{\mu}r\left(1 + \frac{A\mu}{\kappa}\cos\varphi\right)$$

$$\boxed{r = \frac{l^2/(\mu\kappa)}{1 + \frac{A\mu}{\kappa}\cos\varphi} = \frac{p\,\operatorname{sgn}(\kappa)}{1 + \varepsilon\cos\varphi\,\operatorname{sgn}(\kappa)} \qquad \text{Kegelschnitt}} \qquad p = \frac{l^2}{\mu|\kappa|} \quad \varepsilon = \frac{A\mu}{|\kappa|}$$

Erkenntnis: Erhaltungsgrößen sparen Integrationen

da $r \geq 0,\ p \geq 0 \quad \longrightarrow$ Fallunterscheidung

Abstoßung ($\kappa < 0$)	Anziehung ($\kappa > 0$)
$\varepsilon\cos\varphi - 1 \geq 0$	$1 + \varepsilon\cos\varphi \geq 0$
$\varepsilon \geq 1$	$\varepsilon \geq 0$

Übung: A durch E_{rel}, l ausdrücken (Hinweis: $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$)

Ergebnis: $\dfrac{A^2\mu^2}{\kappa^2} = 1 + \dfrac{2E_{\text{rel}}l^2}{\mu\kappa^2} = \varepsilon^2 \geq 0$

$\underline{E_1 = E_{\text{rel}}^{\min} = -\dfrac{\mu\kappa^2}{2l^2}}$

$\varepsilon = 0: \qquad r = p =$ konstant

Kreisbewegung: offenbar nur für $\kappa > 0$ möglich

entspricht tatsächlich dem Minimum von $U_{\text{eff}} = \dfrac{l^2}{2\mu r^2} - \dfrac{\kappa}{r}$

$\underline{E_1 < E_{\mathrm{rel}} < 0}$: $\quad 0 < \varepsilon < 1 \quad$ Ellipse $\quad$ (ebenfalls nur für $\kappa > 0$ möglich)

$$\boxed{\text{1. Keplersches Gesetz}}$$

$$\boxed{\text{Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen mit der Sonne in einem Brennpunkt}}$$

$$r_{\mathrm{min}} = \frac{p}{1+\varepsilon} \qquad \varphi = 0$$

$$r_{\mathrm{max}} = \frac{p}{1-\varepsilon} \qquad \varphi = \pi$$

$$2a = r_{\mathrm{min}} + r_{\mathrm{max}} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2}$$

$$\longrightarrow \qquad a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{l^2}{\mu\kappa}\frac{\mu\kappa^2}{(-2l^2 E_{\mathrm{rel}})} = -\frac{\kappa}{2E_{\mathrm{rel}}} = \frac{\kappa}{2|E_{\mathrm{rel}}|} \qquad \text{N.B.: } \kappa > 0$$

$\longrightarrow$ große Halbachse a nur von Energie abhängig

Exzentrizität ε

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \qquad \longrightarrow \qquad b^2 = a^2(1-\varepsilon^2) = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{l^2}{2\mu|E_{\mathrm{rel}}|}$$

$\longrightarrow$ kleine Halbachse b von E_{rel} **und** l abhängig

Sonnensystem: die meisten Planeten haben kleine Exzentrizitäten

Planet	Merkur	Venus	Erde	Mars	...	Pluto
ε	0.206 selten zu sehen	0.007	0.017	0.093 Kepler 1609 1.+2. Gesetz		0.249 noch nicht bekannt

$$\boxed{\text{3. Keplersches Gesetz}}$$

2. Kepler: $\quad \dfrac{dF}{dt} = \dfrac{l}{2\mu} \quad \longrightarrow \quad F = \pi ab = \dfrac{lT}{2\mu}$

$$\text{Umlaufzeit } T = \frac{2\pi\mu}{l}ab = \frac{2\pi\mu}{l}\frac{\kappa}{2|E_{\mathrm{rel}}|}\frac{l}{\sqrt{2\mu|E_{\mathrm{rel}}|}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\kappa}}\frac{\kappa^{3/2}}{(2|E_{\mathrm{rel}}|)^{3/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\kappa}}a^{3/2}$$

$$\boxed{\text{Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen}}$$

für Planeten im Sonnensystem:

$$\frac{\mu}{\kappa} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{G_N m_1 m_2} = \frac{1}{G_N(m_1 + m_2)} \simeq \frac{1}{G_N M_{S(\text{onne})}}$$

$$M_S = \frac{4\pi R_S^3}{3} \rho_S \qquad \longrightarrow \qquad T^2 = 4\pi^2 \frac{3}{4\pi R_S^3 \rho_S G_N} a^3 = \frac{3\pi}{G_N \rho_S} \left(\frac{a}{R_S}\right)^3$$

$\longrightarrow \qquad T_{\min} = \sqrt{\dfrac{3\pi}{G_N \rho_S}}$ nur von Dichte abhängig, aber unabhängig vom Radius

$\longrightarrow$ Satellit um Sonne ähnliche Umlaufzeit wie um die Erde:

$$\rho_S = 1.41 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}, \ \rho_E = 5.52 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

Übung: $T_{\min}^{\text{Erde}} \simeq 1.4$ Stunden; Radius a für geostationären Satelliten

$E_{\text{rel}} > 0$: $\quad \varepsilon > 1 \quad$ Hyperbel (Grenzfall $\varepsilon = 1$: Parabel)

jetzt beiderlei Vorzeichen von κ möglich

N.B.: Abstoßung ($\kappa < 0$) nur für Coulomb-Potenzial möglich
Gravitation immer anziehend

Abstoßung ($\kappa < 0$)		Anziehung ($\kappa > 0$)
$\varepsilon \cos\varphi - 1 \geq 0$		$1 + \varepsilon \cos\varphi \geq 0$
$\cos\varphi_{\text{as}} = \dfrac{1}{\varepsilon}$	Asymptote	$\cos\varphi_{\text{as}} = -\dfrac{1}{\varepsilon}$
	Streuwinkel θ	
$2\varphi_{\text{as}} + \theta = \pi$		$2\varphi_{\text{as}} - \theta = \pi$
$\theta = \pi - 2\varphi_{\text{as}}$		$\theta = 2\varphi_{\text{as}} - \pi$

$$\theta = |2\varphi_{\text{as}} - \pi|$$

in Übereinstimmung mit der Diskussion des allgemeinen 2-Körper-Problems

Mehrkörper-Problem

$N > 2$: wenige allgemeine Aussagen bekannt

schon für $N = 3$ $\exists$ keine allgemeine Lösung (nur für bestimmte Anfangsbedingungen)

Grund: keine weiteren Erhaltungsgrößen außer $E_{\text{rel}}, \vec{L}_{\text{rel}}, \vec{L}_S, \vec{P}$

alle anderen wie z.B. $E_S = \dfrac{\vec{P}^2}{2M}$ nicht unabhängig

$\longrightarrow$ Lösung i.a. nicht mehr durch einfache Integrationen darstellbar
(keine „vollständig integrablen“ Systeme)

aber: Newtonsche Bewegungsgleichungen natürlich immer numerisch lösbar
bei gegebenen Anfangsbedingungen

trotzdem einige interessante allgemeine Aussagen :

Virialtheorem
mechanische Ähnlichkeit ($\rightarrow$ Kap. III)

Virialtheorem

Aussage über zeitliche Mittelwerte von T, U für Bewegung von N Punktteilchen in begrenztem Raumgebiet

zeitlicher Mittelwert einer beschränkten Funktion $f(t)$:

$$\overline{f} := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} dt' f(t')$$

kinetische Energie

$$2T = \sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} = \sum_a \vec{p}_a \cdot \dot{\vec{r}}_a = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \vec{p}_a \cdot \vec{r}_a\right) - \sum_a \dot{\vec{p}}_a \cdot \vec{r}_a = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \vec{p}_a \cdot \vec{r}_a\right) + \sum_a \vec{\nabla}_a U \cdot \vec{r}_a$$

zeitliches Mittel

$$2\overline{T} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \sum_a \vec{p}_a \cdot \vec{r}_a \Big|_{-t}^{t} + \underbrace{\overline{\sum_a \vec{r}_a \cdot \vec{\nabla}_a U}}_{\text{Virial des Potenzials } U}$$

bei beschränkter Bewegung $\longrightarrow$ $\sum_a |\vec{p}_a \cdot \vec{r}_a| < K$ und daher

$$2\overline{T} = \overline{\sum_a \vec{r}_a \cdot \vec{\nabla}_a U} \qquad \text{Virialsatz}$$

häufiger Spezialfall: $U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ homogene Funktion vom Grad k

für $\lambda > 0$: $U(\lambda\vec{r}_1, \ldots, \lambda\vec{r}_N) = \lambda^k U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

Eulersche Gleichung für homogene Funktionen ($\rightarrow$ Analysis)

$$\sum_a \vec{r}_a \cdot \vec{\nabla}_a U = kU \qquad \longrightarrow \qquad 2\overline{T} = k\overline{U}$$

mit $E = \overline{E} = \overline{T} + \overline{U} = \left(\frac{k}{2} + 1\right)\overline{U}$:

$$\overline{T} = \frac{k}{k+2}E \ , \qquad \overline{U} = \frac{2}{k+2}E \qquad\qquad (k \neq -2)$$

Bem.: für $k = -2$ Vor. des Theorems nicht erfüllt
(unbegrenzte Bewegung oder singuläre T, U)

Anwendungen:

i. Harmonischer Oszillator: $k = 2$

$$\overline{T} = \overline{U} = E/2$$

Kristall in 1. Näherung ein Ensemble von harmonischen Oszillatoren $\longrightarrow$
jeweils zur Hälfte kinetische und potenzielle Energie der Gitterschwingungen

ii. Gravitation (Coulomb): $k = -1$

$$\overline{U} = 2E \ , \quad \overline{T} = -E \qquad \longrightarrow \quad \text{offenbar nur für } E \leq 0 \text{ sinnvoll}$$

$E > 0$: unbegrenzte Bewegung

II.4 Streuung

wichtige Untersuchungsmethode der Experimentalphysik
$\longrightarrow$ Strukturforschung (Atom-, Kern-, Teilchenphysik, ...)

Anordnung: homogener Strahl von Streuteilchen trifft auf Streuzentrum (Target), aus der Ablenkung Hinweise auf Wechselwirkungskraft, bzw. Potenzial

Streuteilchen

Target

Beschränkung auf elastische Streuung zweier Teilchen mit Potenzial $U(r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

Energieerhaltung (Vor.: $\lim\limits_{r\to\infty} U(r) = 0$):

$$(t \to -\infty) \qquad m_1\vec{v}_1^{\,2} + m_2\vec{v}_2^{\,2} = m_1\vec{v}_1^{\,\prime 2} + m_2\vec{v}_2^{\,\prime 2} \qquad (t \to \infty)$$

Impulserhaltung:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1^{\,\prime} + m_2\vec{v}_2^{\,\prime}$$

was ist zu bestimmen?

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ gegeben $\quad\longrightarrow\quad$ $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$ zu bestimmen (6 Größen)

Energie- und Impulserhaltung: 4 Relationen
$\longrightarrow$ nur mehr 2 Größen zu bestimmen, etwa $\vec{v}_1'/|\vec{v}_1'|$

Drehinvarianz des Potenzials $\quad\longrightarrow\quad$ nur Winkel zwischen $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_1'$ relevant:

<u>Streuwinkel θ</u> (abhängig vom Bezugssystem!)

Abseparation der Schwerpunktsbewegung (z.B. im IS mit $\vec{R} = \vec{0}$)

$\longrightarrow$ Relativkoordinate $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$ berechnet

$\longrightarrow$ für die Geschwindigkeiten der beiden Teilchen gilt dann

$$\dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_1 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\,, \quad \dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_2 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}$$

$\theta = \theta_{\text{relativ}}$: Winkel zwischen asymptotischen Relativgeschwindigkeiten
$\vec{v}(t \to -\infty)$ und $\vec{v}(t \to \infty)$

$$E_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2}\vec{v}^{\,2} + U(r)$$

Vor.: $\lim\limits_{r\to\infty} U(r) = 0 \quad\longrightarrow\quad \vec{v}^{\,2}(t \to -\infty) = v^2(t \to \infty) =: v_\infty^2\,, \qquad E_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2}v_\infty^2$

$l = |\vec{L}_{\text{rel}}| = \mu|\vec{r} \times \vec{v}| = \mu r|\vec{v}|\sin(\vec{r}, \vec{v}) = \mu v_\infty b$

Stoßparameter b

Vor. (zur Vereinfachung): $\quad \theta \longrightarrow b(\theta)$ streng monoton fallende Funktion

$\longrightarrow$ den in den Raumwinkel zwischen (θ, φ) und $(\theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$ gestreuten Teilchen entspricht das Flächenelement ($r\,dr\,d\varphi$ zur Erinnerung)

$$d\sigma = -b(\theta)db(\theta)d\varphi$$

einfallende Stromdichte $\quad j$ = Teilchenzahl/(Fläche$\times$Zeit)

$\longrightarrow$ $\quad j\;d\sigma$ = Anzahl der Teilchen/Zeit durch $d\sigma$

$$d\sigma = \frac{j\;d\sigma}{j} = \frac{\text{Zahl der Streuteilchen/Zeit in Raumwinkel } d\Omega}{\text{Zahl der einfallenden Teilchen/(Zeit} \times \text{Fläche)}}$$

$\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$: differentieller Wirkungs(Streu-)querschnitt

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b(\theta) db(\theta) d\varphi}{\sin\theta \; d\theta d\varphi} = -\frac{b(\theta)}{\sin\theta}\frac{db(\theta)}{d\theta}}$$

Rutherford-Streuung

Coulomb-Potenzial: $U(r) = -\dfrac{\kappa}{r}$ $\qquad \kappa = -\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$ (SI-Einheiten)

Rutherford: α-Teilchen ($q_1 = 2e$) auf Atomkerne ($q_2 = Ze$)

Abstoßung

Anziehung

$$\theta = |2\varphi_{as} - \pi|$$

Kepler-Problem: $\quad -\mathrm{sgn}(\kappa)\,\dfrac{1}{\varepsilon} = \cos\varphi_{as} = \cos\left(\dfrac{\pi + \mathrm{sgn}(\kappa)\;\theta}{2}\right)$

$\longrightarrow \quad \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\varepsilon}$ $\qquad$ unabhängig vom Vorzeichen von κ

mit $l = \mu b v_\infty$, $2E_{\text{rel}} = \mu v_\infty^2$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{2l^2 E_{\text{rel}}}{\mu\kappa^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\mu^2 b^2 v_\infty^4}{\kappa^2}}}$$

$$\longrightarrow \qquad \tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{1 - \sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{\kappa^2}{\mu^2 b^2 v_\infty^4}$$

$\longrightarrow \quad \tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{|\kappa|}{\mu b v_\infty^2}$ $\qquad$ sowohl für Anziehung als auch für Abstoßung

$b \to 0 \;\; (l \to 0): \quad \theta \to \pi$ $\qquad$ zentraler Stoß (Abstoßung)

$\qquad E_{\text{rel}} = \dfrac{\mu}{2} v_\infty^2 = U(r_{\text{min}}) = -\dfrac{\kappa}{r_{\text{min}}}$ $\qquad$ natürlich nur für $\kappa < 0$ möglich

$$\longrightarrow \qquad r_{\text{min}} = -\frac{2\kappa}{\mu v_\infty^2} = \frac{2|\kappa|}{\mu v_\infty^2}$$

Stoßparameter als Funktion von θ: $\quad b(\theta) = \dfrac{|\kappa|}{\mu v_\infty^2}\cot\dfrac{\theta}{2}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b(\theta)}{\sin\theta}\frac{db(\theta)}{d\theta} = -\frac{b(\theta)}{\sin\theta}\frac{|\kappa|}{\mu v_\infty^2}\frac{(-1)}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \left(\frac{\kappa}{\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\sin\theta\sin^3\dfrac{\theta}{2}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\kappa}{2\mu v_\infty^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}} = \left(\frac{\kappa}{4E_{\text{rel}}}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}}$$

Rutherford-Streuformel

Totaler Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = -\int d\varphi db(\theta)b(\theta) = 2\pi \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} bdb = \pi\left(b_{\max}^2 - b_{\min}^2\right)$$

$b_{\min} < b < b_{\max}$: Bereich, wo Streuung stattfindet, d.h. $\theta > 0$

$b_{\min} = 0$

klassischer Wirkungsquerschnitt keine sehr interessante Größe, da

i. entweder $\theta > 0$ für $\forall b$ $\quad b_{\max} = \infty$

$\longrightarrow \quad \sigma_{\text{tot}} = \infty$ (z.B. für Rutherford-Streuung)

ii. oder $U(r) =$ konstant für $r \geq R$ $\quad b_{\max} = R$

$\longrightarrow \quad \sigma_{\text{tot}} = \pi R^2$ (geometrischer Querschnitt)

viel aussagekräftiger in QM, QFT

leicht einzusehen: bisherige Aussagen für Streuwinkel und Wirkungsquerschnitt gelten im

Schwerpunktsystem

$$\dot{\vec{R}} = \vec{0} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

$$\longrightarrow \quad \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1 \ , \quad \vec{v}_2' = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1'$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}(t \to -\infty) + \vec{v}_2 \quad \longrightarrow \quad \vec{v}_1 = \frac{m_2}{M}\vec{v}(t \to -\infty) \ , \ \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{M}\vec{v}(t \to -\infty)$$

$$\vec{v}_1' = \frac{m_2}{M}\vec{v}(t \to \infty) \ , \ \vec{v}_2' = -\frac{m_1}{M}\vec{v}(t \to \infty)$$

Folgerung: $\quad \underline{\theta_{\text{relativ}} = \theta_{\text{Schwerpunkt}}}$

Energieerhaltung: $\quad m_1 v_1^2 + \dfrac{m_1^2}{m_2^2} v_1^2 = m_1 v_1'^2 + \dfrac{m_1^2}{m_2^2} v_1'^2$

und daher

$$v_1 = v_1' \ , \quad v_2 = v_2' \ , \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Laborsystem

Teilchen 2=Target ruht im Anfangszustand ($t \to -\infty$)

spezielle Galilei-Transformation mit $\vec{V} = -\vec{v}_2 \qquad \longrightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{1L} &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \qquad & \vec{v}_{1L}' &= \vec{v}_1' - \vec{v}_2 \\ \vec{v}_{2L} &= \vec{v}_2 - \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad & \vec{v}_{2L}' &= \vec{v}_2' - \vec{v}_2 \end{aligned}$$

Impulserhaltung: $\qquad m_1\vec{v}_{1L} = m_1\vec{v}_{1L}' + m_2\vec{v}_{2L}'$

$$\tan\theta_L = \frac{v_1'\sin\theta}{v_2 + v_1'\cos\theta} = \frac{v_1\sin\theta}{v_2 + v_1\cos\theta}$$

$$\tan\theta_L = \frac{\frac{v_1}{v_2}\sin\theta}{1 + \frac{v_1}{v_2}\cos\theta} = \frac{m_2\sin\theta}{m_1 + m_2\cos\theta}$$

für $m_1 > m_2 \qquad \longrightarrow \qquad v_2 > v_1 \qquad \longrightarrow \qquad \theta_L$ maximal für $\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_{1L}' = 0$

$$\longrightarrow \qquad \sin\theta_L \le \frac{v_1'}{v_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

für $m_2/m_1 \to 0 \qquad \longrightarrow \qquad \theta_L \to 0$

$\longrightarrow$ sehr schweres Teilchen wird nicht abgelenkt (Kanonen auf Spatzen)

$$E_L = E_{L1} = \frac{m_1}{2}v_\infty^2$$

$$E_{\text{rel}} = \frac{\mu}{2}v_\infty^2 = \frac{\mu}{m_1}E_L = \frac{m_2}{M}E_L < E_L$$

nur E_{rel} steht für physik. Prozesse zur Verfügung $\quad \longrightarrow \quad m_1 \gg m_2$ ungünstig

Übung:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L} = \frac{d\sigma}{d\Omega}\frac{(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\theta)^{3/2}}{m_2^2(m_2 + m_1\cos\theta)}$$

i. $m_1 \ll m_2$: $\qquad \dfrac{d\sigma}{d\Omega_L} \simeq \dfrac{d\sigma}{d\Omega} \qquad$ LS $\simeq SS$

ii. $m_1 = m_2$: $\qquad \tan\theta_L = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \tan\dfrac{\theta}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \theta_L = \dfrac{\theta}{2}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_L} = 4\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

III Lagrangesche Formulierung der Mechanik

Kräfte bekannt $\longrightarrow$ Newtonsche Bewegungsgleichungen

häufige Situation: nicht alle Kräfte explizit bekannt, aber Einschränkungen der Teilchenbewegungen auf gewisse Flächen (Pendel, schiefe Ebene, ...)
$\longrightarrow$ Zwangskräfte

Vorteile der Lagrange-Formulierung:

i. Verallgemeinerte (statt kartesischer) Koordinaten meist leichter in Lagrangefunktion zu verwenden als direkt in Bewegungsgl.

ii. Optimale Methode, um Symmetrien eines Problems zu erkennen und auszuwerten

iii. Gesamte moderne Physik von klass. Feldtheorie über QM bis QFT verwendet Lagrange-, bzw. Hamilton-Formalismus $\longrightarrow$ gemeinsame Strukturen erkennbar

III.1 Zwangskräfte und Lagrangefunktion

geometrisches (sphärisches) Pendel: starrer masseloser „Faden" der Länge l mit Massenpunkt am freien Ende

Zwangsbedg.: $F(\vec{r}) = \vec{r}^{\,2} - l^2 = 0$

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z}$

Zwangskraft $\vec{Z}$ sorgt dafür, dass Teilchen auf Fläche $F(\vec{r}) = 0$ bleibt

Erfahrungstatsache : $\vec{Z} \perp$ Fläche

$\longrightarrow$ $\vec{Z} \sim \vec{\nabla}F(\vec{r})$ ($= 2\vec{r}$ beim Pendel)

Lagrange-Methode 1. Art:

Methode der Lagrange-Multiplikatoren (λ)

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{K}(\vec{r}) + \lambda(t)\vec{r} \\ 0 &= r^2 - l^2 \end{aligned} \qquad \text{4 Gleichungen für } \vec{r}(t), \lambda(t)$$

$\longrightarrow$ Zwangskraft $\vec{Z}$ ($= \lambda(t)\vec{r}$ in diesem Fall) explizit zu berechnen

Lagrange-Methode 2. Art:

verallgemeinerte Koordinaten einführen, so dass $F(\vec{r}\,) = 0$ identisch erfüllt ist

verallgemeinerte (krummlinige) Koord. in E^3

verallg. Koord. u^1, u^2, u^3 statt kartesischer Koord. x, y, z

Radiusvektoren durch u^i parametrisiert: $\vec{r}(u^1, u^2, u^3) = \vec{r}(u^i)$

für glatte, umkehrbare Parametrisierung $\exists$ 3 linear unabhängige Vektoren $\vec{f}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}$

Def.: $\vec{f}_i \cdot \vec{f}_j =: g_{ij}$

kovariante Komponenten des metrischen Tensors g

o.B.: $\det\ g = (\det\ f)^2$, wobei $\det\ f := \det(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) \quad \longrightarrow \quad g := \det\ g > 0$

Spezialfall: orthogonale krummlinige Koordinaten $\leftrightarrow$ g_{ij} diagonal ($g_{ij} = 0$ für $i \neq j$)

Zerlegung eines beliebigen Vektors: $\vec{A} = A^i \vec{f}_i$

A^i kontravariante Komponenten von $\vec{A}$

Bem.: manchmal normierte Basisvektoren $\vec{f}_i / \sqrt{g_{ii}}$ verwendet

Vektoranalysis: alle Differentialoperationen, Flächen- und Volumselemente, ... durch g_{ij} auszudrücken

Volumselement: $dV = \sqrt{g}\, du^1 du^2 du^3$

Linienelement: $\dot{\vec{r}}^2 = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} \frac{du^i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j} \frac{du^j}{dt} = g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}$

da für beliebige funktionale Abhängigkeit (nicht nur von t) gültig $\longrightarrow$

Quadrat des Linienelements ds : $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{ij} du^i du^j$

wichtiges Beispiel: Kugelkoordinaten=sphärische Polarkoordinaten

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \\
x &= r \sin\theta \cos\varphi & 0 \leq \theta \leq \pi \\
y &= r \sin\theta \sin\varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\
z &= r \cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{f}_r &= \sin\theta \cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\theta \sin\varphi\, \vec{e}_2 + \cos\theta\, \vec{e}_3 \\
\vec{f}_\theta &= r\cos\theta \cos\varphi\, \vec{e}_1 + r\cos\theta \sin\varphi\, \vec{e}_2 - r\sin\theta\, \vec{e}_3 \\
\vec{f}_\varphi &= -r\sin\theta \sin\varphi\, \vec{e}_1 + r\sin\theta \cos\varphi\, \vec{e}_2
\end{aligned}
$$

$\det f = \sqrt{g} = r^2 \sin\theta$, $\quad g_{ij} = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2\theta)$

Volumselement: $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$

Linienelement: $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$

Übung: dV, ds^2 in Zylinderkoordinaten r, φ, z

$dV = r dr d\varphi dz$, $\quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$

Anwendung auf sphärisches Pendel:

Kugelkoordinaten mit $\theta \to \pi - \theta$ (tiefster Punkt $\sim$ $\theta = 0$)

$\vec{r}^2 = l^2 \qquad \longrightarrow \qquad$ nur mehr Koordinaten $\theta(t), \varphi(t)$ zu betrachten

da $\vec{Z} \sim \vec{r}$ und $\vec{r} \cdot \vec{f}_\theta = \vec{r} \cdot \vec{f}_\varphi = 0$

$\longrightarrow$ Newtonsche Gl. $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z}$ mit $\vec{f}_\theta, \vec{f}_\varphi$ multiplizieren, um $\vec{Z}$ zu eliminieren

$$\left(m\ddot{\vec{r}} - \vec{K}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{2 Diffgl.}$$
$$\left(m\ddot{\vec{r}} - \vec{K}\right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0 \qquad \text{für } \theta(t), \varphi(t)$$

Lösung der Diffgl.: $\vec{r}(t) \longrightarrow \vec{Z}(t) = m\ddot{\vec{r}}(t) - \vec{K}(\vec{r}(t))$ berechenbar

Systematische Methode 2. Art für N Punktteilchen

Nebenbedingungen (Zwangsbedg.): $F_\alpha(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$

(offensichtliche) Vor.: s Zwangsbedingungen seien (algebraisch) unabhängig

Nomenklatur: Zwangsbedg. dieser Form sind

holonom: F_α unabhängig von $\dot{\vec{r}}_a$ [nichtholonom: auch von $\dot{\vec{r}}_a$ abhängig]

skleronom für $\dfrac{\partial F_\alpha}{\partial t} = 0$ [rheonom bei expl. Zeitabhängigkeit]

geometrische Interpretation holonomer Zwangsbedg.:
definieren eine Hyperfläche im Konfigurationsraum V^{3N}

Bem.: diese Hyperflächen tragen i.a. Struktur einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit (z.B. Thirring, Bd. 1)

Def.: virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}_a$ = (infinitesimale) Bewegung auf Hyperfläche, aber nicht unbedingt eine Lösung der Bewegungsgl. (hängt von den Kräften $\vec{K}_a$ ab)

per Def.: $F_\alpha(\vec{r}_a + \delta\vec{r}_a, t) = 0 = F_\alpha(\vec{r}_a, t) \longrightarrow \vec{\nabla}_a F_\alpha \cdot \delta\vec{r}_a = 0$ (separat für jedes a)

$\longrightarrow \vec{\nabla}_a F_\alpha \perp$ Hyperfläche

Newton: $\dot{\vec{p}}_a = \vec{K}_a + \vec{Z}_a = \vec{K}_a + \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_a F_\alpha$

d'Alembertsches Prinzip

$$\sum_{a=1}^{N} \left(\dot{\vec{p}}_a - \vec{K}_a\right) \cdot \delta\vec{r}_a = 0$$

enthält Zwangsbedingungen nur über die „erlaubten“ virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_a$

verallgemeinerte Koordinaten $q^1, \ldots, q^f, q^{f+1}, \ldots, q^{3N}$ so eingeführt, dass Bewegung auf Hyperfläche durch $q^1, \ldots, q^f$ parametrisiert werden kann:

$$\vec{r}_a(q^1(t), \ldots, q^f(t), q^{f+1}, \ldots, q^{3N})$$

d.h. $F_\alpha(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$ entspricht $q^i =$ konstant für $i = f+1, \ldots, 3N$

da nach Vor. s unabhängige Zwangsbedg. $\longrightarrow f = 3N - s$

f: Anzahl der unabhängigen Freiheitsgrade des Systems

Pendel: $N = s = 1 \longrightarrow f = 2$, nämlich $q^1 = \theta, q^2 = \varphi$ und $q^3 = r =$ konstant virtuelle Verrückungen in verallg. Koordinaten denkbar einfach:

$$\begin{array}{ll} \delta q^i & \text{völlig beliebig für } i = 1, \dots, f \\ \delta q^i = 0 & \text{für } i = f+1, \dots, 3N \end{array}$$

<u>Vorgangsweise</u>: d'Alembertsches Prinzip auf verallg. Koord. q^i umschreiben

$$\sum_{a=1}^{N} \vec{K}_a \cdot \delta\vec{r}_a = \sum_{a=1}^{N}\sum_{i=1}^{f} \vec{K}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i}\delta q^i =: \sum_{i=1}^{f} Q_i \delta q^i$$

dabei benützt: $\delta q^i = 0$ für $i > f$

<u>verallgemeinerte Kräfte</u> $\quad Q_i = \sum_{a=1}^{N} \vec{K}_a \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i} \qquad (i = 1, \dots, f)$

Bem.: Q_i haben nicht unbedingt die Dimension einer Kraft
(hängt von der Dimension der q^i ab)

<u>Trägheitsanteil</u>:

$$\sum_{a=1}^{N} \dot{\vec{p}}_a \cdot \delta\vec{r}_a = \sum_{a=1}^{N} m_a \ddot{\vec{r}}_a \cdot \delta\vec{r}_a = \sum_{a,i} m_a \delta q^i \ddot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i} = \sum_{a,i} m_a \delta q^i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i}\right) - \dot{\vec{r}}_a \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i}\right]$$

Nebenrechnung:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 \vec{r}_a}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 \vec{r}_a}{\partial q^i \partial t} = \frac{\partial}{\partial q^i}\underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t}\right)}_{\dot{\vec{r}}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt}} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_a}{\partial q^i} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \dot{\vec{r}}_a}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i}$$

daher:

$$\sum_{a=1}^{N} \dot{\vec{p}}_a \cdot \delta\vec{r}_a = \sum_{a,i} m_a \delta q^i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_a}{\partial \dot{q}^i}\right) - \dot{\vec{r}}_a \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_a}{\partial q^i}\right] = \sum_{i=1}^{f} \delta q^i \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}\right]$$

mit der kinetischen Energie von N Punktteilchen: $\quad T = \dfrac{1}{2}\sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2}$

insgesamt:

$$\sum_{a=1}^{N} \left(\dot{\vec{p}}_a - \vec{K}_a\right) \cdot \delta\vec{r}_a = \sum_{i=1}^{f} \delta q^i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i\right) = 0$$

da δq^i völlig beliebig für $i = 1, \dots, f$ $\quad \longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i = 0 \qquad (i = 1, \dots, f)$$

für konservative Kräfte: $\quad \vec{K}_a = -\vec{\nabla}_a U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$

$$\longrightarrow \qquad Q_i = \textstyle\sum_a \vec{K}_a \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i} = -\displaystyle\sum_a \vec{\nabla}_a U \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i} = -\frac{\partial U(\vec{r}_a(q^i))}{\partial q^i} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^i} = 0$$

Def.: Lagrangefunktion des Systems mit f Freiheitsgraden

$$L(q^1,\ldots,q^f,\dot q^1,\ldots,\dot q^f) = T - U$$

Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad (i = 1,\ldots,f)}$$

Def.: $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot q^i}$ verallgemeinerter Impuls

Diskussion:

i. Keine Zwangsbedingungen: $s = 0,\ f = 3N$

$\longrightarrow \quad L = \dfrac{1}{2}\sum_a m_a \dot{\vec r}_a^{\,2} - U(\vec r_a)$

$\longrightarrow \quad q^i$: kartesische Koordinaten x_{aj} $(a = 1,\ldots,N; j = 1,2,3)$

Impuls: $\dfrac{\partial L}{\partial \dot x_{aj}} = m_a \dot x_{aj}$, $\qquad \dfrac{\partial L}{\partial x_{aj}} = -\dfrac{\partial U}{\partial x_{aj}}$

Euler-Lagrange $\longrightarrow \quad m_a \ddot x_{aj} + \dfrac{\partial U}{\partial x_{aj}} = 0$

$\longrightarrow \quad m_a \ddot{\vec r}_a = -\vec\nabla_a U = \vec K_a$

ii. Sphärisches Pendel

$L(\vec r, \dot{\vec r}) = \dfrac{1}{2} m \dot{\vec r}^{\,2} - U(\vec r)$

$x = l\sin\theta\cos\varphi$
$y = l\sin\theta\sin\varphi$
$z = -l\cos\theta$

$r = l \quad \longrightarrow \quad \dot{\vec r}^{\,2} = l^2\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2\right)$

$U(\vec r) = U_0 + mgz = U_0 - mgl\cos\theta = mgl(1-\cos\theta)$
dabei $U_0 = mgl$ gewählt $\longrightarrow \quad U = 0$ für $\theta = 0$

$L(\theta,\varphi,\dot\theta,\dot\varphi) = \dfrac{m}{2} l^2\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2\right) - mgl(1-\cos\theta)$

Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 = ml^2\ddot\theta - ml^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta + mgl\sin\theta\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}(ml^2\sin^2\theta\dot\varphi) = 0
\end{aligned}$$

Def.: φ ist ein Beispiel einer zyklischen Koordinate, wo L (zwar von $\dot\varphi$, aber) nicht von φ abhängt

Folgerung: der zu einer zyklischen Koordinate gehörige verallgemeinerte Impuls ist erhalten (also zeitlich konstant)

$$\longrightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi = L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \qquad \text{Erhaltungsgröße}$$

Bem.:

i. Diese Erhaltungsgröße ist in $L(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ sofort zu erkennen, weit weniger offensichtlich in kartesischen Koordinaten

ii. Analog zur verallg. Kraft Q_i muss auch p_i nicht unbedingt die Dimension eines Impulses haben (im jetzigen Beispiel ein Drehimpuls)

$\dot{\varphi} = \dfrac{L_z}{ml^2 \sin^2 \theta} \qquad \longrightarrow \qquad \theta = 0$ nur für $L_z = 0$ möglich, da $\dot{\varphi}$ beschränkt

Bewegungsgleichung für θ:

$$ml^2\ddot{\theta} - \frac{L_z^2 \cos\theta}{ml^2 \sin^3\theta} + mgl \sin\theta = 0$$

nach Multiplikation mit $\dot{\theta} \qquad \longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\{\underbrace{\frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2\theta}}_{T} \underbrace{- mgl\cos\theta}_{U-U_0}\} = 0$$

$$\longrightarrow \qquad E = T + U = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) = \text{konstant}$$

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2\theta} + mgl(1 - \cos\theta)$$

$\longrightarrow \qquad \theta(t; E, L_z)$ durch einfache Integration

$\longrightarrow \qquad \dot{\varphi} = \dfrac{L_z}{ml^2 \sin^2\theta} \qquad \longrightarrow \qquad \varphi(t; E, L_z)$

mit 2 weiteren Integrationskonstanten θ_0, φ_0

allerdings: nicht durch elementare Funktionen darstellbar ($\rightarrow$ elliptische Funktionen)

qualitative Diskussion (numerische Lösung immer möglich)

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{L_z^2}{2ml^2 \sin^2\theta} + mgl(1 - \cos\theta)$$

$$E \geq U_{\text{eff}}$$

i. $L_z = 0$ $\longrightarrow$ $\dot{\varphi} = 0$ $\longrightarrow$ ebenes Pendel

ii. $L_z \neq 0$: Minimum bei $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ ($\longrightarrow$ Kap. IV)

$E = E_1 = E_{\min}$: $\theta = \theta_0 =$ konstant, $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2 \theta_0} =$ konstant

Karussell

$E = E_2 > E_1$: Bewegung zwischen Umkehrpunkten $\theta_{\min}$ und $\theta_{\max}$

Energiebilanz bei Bewegungen mit Zwangsbedingungen

skleronome Bedg.: Fläche zeitunabhängig, $\delta\vec{r}_a \perp \vec{Z} \sim \vec{\nabla}_a F$

$\longrightarrow$ Zwangskräfte leisten keine Arbeit

rheonome Bedg.: Mannigfaltigkeit der Bewegung zeitabhängig

$\longrightarrow$ physikalisch realisierte Bewegungen keine virtuellen Verrückungen

$\longrightarrow$ Zwangskräfte leisten Arbeit in diesem Fall

Vor.: zeitunabhängiges Potenzial $U(\vec{r}_a)$

$$m_a \ddot{\vec{r}}_a + \vec{\nabla}_a U = \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha(t) \vec{\nabla}_a F_\alpha(\vec{r}_b, t)$$

skalar mit $\dot{\vec{r}}_a$ multiplizieren und über a summieren

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} + U(\vec{r}_a)\right] = \sum_{a,\alpha} \lambda_\alpha(t) \dot{\vec{r}}_a \cdot \vec{\nabla}_a F_\alpha(\vec{r}_b, t)$$

da $F_\alpha(\vec{r}_a(t), t) = 0 \ \forall\, t$ $\longrightarrow$

$$\frac{dF_\alpha}{dt} = \sum_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \vec{\nabla}_a F_\alpha + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} = 0$$

$\longrightarrow$ $E(t) = \frac{1}{2}\sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} + U(\vec{r}_a)$ zeitabhängig

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\sum_\alpha \lambda_\alpha(t) \frac{\partial F_\alpha(\vec{r}_a, t)}{\partial t}$$

Anwendung: Pendel mit veränderlicher Fadenlänge (Schaukel)

$$F = l^2(t) - \vec{r}^{\,2} = 0$$

$\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} F = -2\lambda \vec{r}$

da $\vec{Z}$ zum Aufhängepunkt zeigt $\longrightarrow$ $\lambda > 0$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2l\dot{l}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{dE(t)}{dt} = -2\lambda(t) l\dot{l}$$

Verkürzung: $\dot{l}(t) < 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dE(t)}{dt} > 0$ Energiezufuhr

Verlängerung: $\dot{l}(t) > 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dE(t)}{dt} < 0$ Energieentnahme

Technik des Schaukelns:

Umkehrpunkt: λ minimal, $\dot{l} > 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dE(t)}{dt} = -2\lambda_{\min} l|\dot{l}|$

Scheitelpunkt: λ maximal, $\dot{l} < 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{dE(t)}{dt} = 2\lambda_{\max} l|\dot{l}|$

wenn $|\dot{l}|$ annähernd gleich $\longrightarrow$ insgesamt

$$\frac{dE(t)}{dt} = 2l|\dot{l}|(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) > 0$$ Energiezufuhr (woher?)

III.2 Mechanische Ähnlichkeit

Grundidee: Euler-Lagrange-Gl. sind homogen in der Lagrangefunktion L

$L \to \lambda L$: Bewegungsgl. ungeändert

Vor.: Potenzial homogene Funktion der Koordinaten (Grad k)

$$U(\alpha\vec{r}_1, \ldots, \alpha\vec{r}_N) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$$

Ähnlichkeitstransformation: $\vec{r}_a \to \alpha\vec{r}_a,\ t \to \beta t \qquad (\alpha, \beta > 0)$

Längen um Faktor α gestreckt
Zeiten um Faktor β gedehnt

Geschwindigkeiten: $\vec{v}_a = \dot{\vec{r}}_a \to \frac{\alpha}{\beta}\dot{\vec{r}}_a$

kinetische und potenzielle Energie: $T \to \frac{\alpha^2}{\beta^2} T\ , \quad U \to \alpha^k U$

daher Wahl des Skalenfaktors λ:

$$\lambda = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k \quad \longrightarrow \quad \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}} \ : \quad L \longrightarrow \lambda L$$

Bewegungsgl. ungeändert $\longrightarrow$ selbe Form der Bahnen ähnliche Bahnen

Vergleich Zeiten (t), Längen (l), Geschwindigkeiten (v), Energien (E), Drehimpulse (L)

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}} \quad , \quad \frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}} \quad , \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k} \quad , \quad \frac{L'}{L} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}}$$

Anwendungen:

i. Harmonischer Oszillator ($k = 2$):

$\longrightarrow$ Perioden von Amplitude unabhängig

ii. Homogenes Kraftfeld ($k = 1$): $t'/t = \sqrt{l'/l}$

iii. Kepler-Problem ($k = -1$):

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \text{3. Keplersches Gesetz}$$

Bem.: Unabhängigkeit von kleiner Halbachse nicht aus Ähnlichkeitsüberlegungen ableitbar

Weitere Skalierungen: $m_a \to \gamma m_a \ , \quad U \to \delta\, U \qquad (\gamma, \delta > 0)$

$\longrightarrow$ ähnliche Bahnen für $\lambda = \dfrac{\gamma\alpha^2}{\beta^2} = \delta\alpha^k$

iv. Konsequenzen für Streuung

ähnliche Streubahnen: Stoßparameter $b \to \alpha b$, Streuwinkel θ ungeändert

$$E_{\text{rel}} = E_{\text{kin}}(t \to \pm\infty) = \mu v_\infty^2/2 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\gamma\alpha^2}{\beta^2} E_{\text{rel}}$$

Wirkungsquerschnitt: $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} \longrightarrow \alpha^2 \dfrac{d\sigma}{d\Omega}$

Ansatz für Potenzial: $U(\vec{r}) = \delta\, r^k u(\vec{r}/r)$

$u(\vec{r}/r)$ skalenunabhängig, da nur von Richtung abhängig

Ausgangspunkt: Streuung für festes $E_{\text{rel}} = E_0$ und $\delta = 1$

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = f_0(\theta)$$

Skalierung: $E_{\text{rel}} = \dfrac{\gamma\alpha^2}{\beta^2} E_0$, δ beliebig

$$\longrightarrow \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 f_0(\theta) = \left(\frac{\gamma\alpha^2}{\delta\beta^2}\right)^{\frac{2}{k}} f_0(\theta) = \left(\frac{E_{\text{rel}}}{\delta E_0}\right)^{\frac{2}{k}} f_0(\theta)$$

$$\underline{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{E_{\text{rel}}}{\delta}\right)^{\frac{2}{k}} f(\theta)}$$

$\longrightarrow$ Abhängigkeit von Energie und Stärke des Potenzials (Parameter δ) völlig bestimmt durch Ähnlichkeitsüberlegung!

Rutherford-Streuung: $\quad k=-1,\ \delta=|\kappa|$

$$\longrightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\kappa^2}{E_{\text{rel}}^2}f(\theta)=\frac{\kappa^2}{E_{\text{rel}}^2 16\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

Bem.: $\frac{d\sigma}{d\Omega}\sim\delta^2$ allgemeine Vorhersage der QM $\longrightarrow$ klassisch nur für $k=-1$ möglich

$\longrightarrow \quad \frac{d\sigma_{\text{kl}}}{d\Omega}=\frac{d\sigma_{\text{QM}}}{d\Omega}$ nur für Rutherford-Streuung möglich

v. Biophysikalische Anwendung

Biologie: Leistung eines Tieres $\sim$ Oberfläche $\sim l^2$

Grund: ca. 25% Muskelleistung, Rest als Wärme abgegeben
Wärmeabgabe $\sim$ Oberfläche, daher auch verfügbare Muskelleistung $\sim l^2$

Lauf in der Ebene: Energieverlust vor allem durch Luftwiderstand
(wenn v nicht zu klein: Ameise!)
Reibungskraft $K_R\sim v^2l^2 \quad\longrightarrow\quad$ Leistung $\sim v^3l^2$

$\longrightarrow$ maximales v unabhängig von l und daher unabhängig von der Größe (Hund, Pferd)

Lauf bergauf: Leistung $mgv\sim l^3v \quad\longrightarrow\quad$ maximales $v\sim l^{-1}$

$\longrightarrow$ Hund läuft schneller bergauf als ein Pferd

Lit.: J.M. Smith, Mathematical ideas in biology, Cambridge UP (1968)

III.3 Hamiltonsches Prinzip

Beh.: Euler-Lagrange-Gl. sind die Gleichungen eines Variationsproblems

Konfigurationsraum

Wege C_1, C_2 : $q^i(t)$ für $t_1\le t\le t_2$

Endpunkte $q^i(t_1), q^i(t_2)$ festgehalten

$(i=1,\dots,f)$

Wirkung(sfunktional) Wirkung: where the action is

$$S[C]=\int_{t_1}^{t_2} dtL(q^i(t),\dot q^i(t),t) \qquad \text{wegabhängig}$$

Dimension: [Wirkung]=[Energie $\times$ Zeit]

Variationsproblem: gesucht wird der Weg $\overline{C}$, der $S[C]$ zu einem Extremum macht

Diskussion für $f=1$ (Verallgemeinerung trivial)

sei $\overline{q}(t)$ die gesuchte Extremalbahnkurve mit $\overline{q}(t_1)=q(t_1),\overline{q}(t_2)=q(t_2)$

infinitesimal geänderter Weg:

$q(t) = \overline{q}(t) + \alpha y(t)$ $\qquad$ α infinitesimal, zeitunabhängig

$y(t)$ beliebige Funktion mit $y(t_1) = y(t_2) = 0$

Extremalbedingung: $\quad \dfrac{dS}{d\alpha}(\alpha = 0) = 0$

Variation der Wirkung:

$$
\begin{aligned}
S[C] - S[\overline{C}] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ L(q(t), \dot{q}(t), t) - L(\overline{q}(t), \dot{\overline{q}}(t), t) \right\} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} \alpha y + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \alpha \dot{y} + O(\alpha^2) \right\} \\
&= \alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} y + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} y \right] - y \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} + O(\alpha^2) \\
&= \alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} y \Big|_{t_1}^{t_2} + \alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \, y \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} + O(\alpha^2)
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow \quad \dfrac{dS}{d\alpha}(\alpha = 0) = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} dt \, y \left\{ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right\} = 0$ $\quad$ für bel. Funktion $y(t)$ mit $y(t_1) = y(t_2) = 0$

$\longrightarrow \quad$ Lösung des Variationsproblems $\overline{q}(t)$ erfüllt $\quad \dfrac{\partial L}{\partial q} - \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$

Hamiltonsches Prinzip (f beliebig)

$$\boxed{\text{Wirkung } S[C] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t) \text{ extremal} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, f)}$$

Ergänzungen

i. Extremum ist in vielen Fällen ein (lokales) Minimum

$\longrightarrow \quad$ Prinzip der kleinsten Wirkung

am Beispiel des eindimensionalen Problems: $\quad L = \dfrac{m}{2} \dot{x}^2 - U(x)$

Entwicklung um Extremalkurve $\overline{x}(t)$ bis $O(\alpha^2)$: $\quad x(t) = \overline{x}(t) + \alpha y(t)$

$$L = \frac{m}{2} \dot{\overline{x}}^2 - U(\overline{x}) + O(\alpha) + \frac{\alpha^2}{2} \left[m \dot{y}^2 - U''(\overline{x}) y^2 \right] + O(\alpha^3)$$

$\longrightarrow \quad S[C] = S[\overline{C}] + \dfrac{\alpha^2}{2} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} dt \left[m \dot{y}^2 - U''(\overline{x}) y^2 \right] + O(\alpha^3)$

$y(t_1) = y(t_2) = 0 \quad \longrightarrow \quad$ für nicht zu große $|t_2 - t_1|$ dominiert meist der 1. Term $m \dot{y}^2 \geq 0$

$\longrightarrow \quad S[\overline{C}]$ minimal unter diesen Voraussetzungen

Allg.: Prinzip der stationären Wirkung

ii. Lagrangefunktion **nicht** eindeutig bestimmt durch Euler-Lagrange-Gl.

$$L' = L + \frac{df(q^i(t),t)}{dt} \qquad \text{mit bel. Funktion } f \text{ (unabhängig von } \dot{q}^i)$$

$$S' = S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{df}{dt} = S + \underbrace{f(q^i(t_2),t_2) - f(q^i(t_1),t_1)}_{\text{unabhängig vom Weg } C}$$

$\longrightarrow$ $\qquad S$ extremal $\quad \leftrightarrow \quad S'$ extremal

iii. Holonome Zwangsbedingungen

Lagrangefunktion L für N-Teilchen-System ohne Zwangsbedingungen

Zwangsbedg. (holonom): $\qquad F_\alpha(\vec{r}_a, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, s)$

Beh.: Bewegungsgl. sind die Euler-Lagrange-Gl. für $\widehat{L} = L + \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha F_\alpha$

Bew. in kart. Koord.:

$$0 = \frac{\partial \widehat{L}}{\partial x_{ai}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{L}}{\partial \dot{x}_{ai}} = \frac{\partial L}{\partial x_{ai}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ai}} + \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_{ai}}$$

$\longrightarrow$ $\qquad$ Lagrange-Methode 1. Art

Methode 2. Art: verallg. Koord. $q^1, \ldots, q^f, q^{f+1}, \ldots, q^{3N}$ so einführen, dass

$F_\alpha(q^i(t),t) = 0$ identisch erfüllt mit konstanten $q^{f+1}, \ldots, q^{3N}$

$\longrightarrow$ $\qquad \widehat{L}(q^i, \dot{q}^i, t) = L(q^i, \dot{q}^i, t)$

$\longrightarrow$ $\qquad$ keine Zwangskräfte in den Bewegungsgl. für $q^1, \ldots, q^f$

III.4 Symmetrien und Erhaltungssätze

Lagrange-Formalismus ideal geeignet, um Symmetrien der Bewegungsgl. entweder zu erkennen oder einzubauen

Symmetrietransformationen:

Bewegungsgl. bleiben (form)invariant unter Transformationen

$$t \to t' \ , \quad q^i(t) \to q^{i\prime}(t')$$

d.h., Bewegungsgl. sehen in $q^i(t), t$ genau so aus wie in $q^{i\prime}(t'), t'$

explizites Beispiel für (Form-)Invarianz: $\qquad N$ Punktteilchen im Potenzial $U(\vec{r}_a)$

$$m_a \frac{d^2\vec{r}_a(t)}{dt^2} = -\vec{\nabla}_a U(\vec{r}_b) \qquad \leftrightarrow \qquad m_a \frac{d^2\vec{r}_a^{\,\prime}(t')}{dt'^2} = -\vec{\nabla}_a' U(\vec{r}_b^{\,\prime})$$

Euler-Lagrange-Gl. aus Wirkung $S[q^i(t)]$

$\longrightarrow$ $\qquad$ hinreichende Bedingung für Invarianz:

$$S[q^{i\prime}(t')] \;=\; S[q^i(t)]$$

$$\int_{t_1'}^{t_2'} dt' L(q^{i\prime}(t'), \dot{q}^{i\prime}(t'), t') \quad = \quad \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t)$$

Klassische Physik: nur kontinuierliche Transformationen führen zu Erhaltungsgrößen
relevante Struktur steckt bereits in infinitesimalen Transformationen ($\rightarrow$ Lie-Gruppen):

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' = t + \alpha\,\tau(q^i, \dot{q}^i, t) + O(\alpha^2) \\ q^i(t) &\rightarrow q^{i\prime}(t') = q^i(t) + \alpha\,\rho^i(q^j, \dot{q}^j, t) + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

Invarianz der Wirkung:

$$\begin{aligned} 0 &= S[q^{i\prime}(t')] - S[q^i(t)] = \int_{t_1'}^{t_2'} dt' L(q^{i\prime}(t'), \dot{q}^{i\prime}(t'), t') - S[q^i(t)] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(1 + \alpha \frac{d\tau}{dt}\right) \left[L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t) + \alpha \frac{dL}{d\alpha}|_{\alpha=0}\right] - S[q^i(t)] + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

muss für beliebige Intervalle $[t_1, t_2]$ gelten $\quad \longrightarrow$

$$L\frac{d\tau}{dt} + \frac{d}{d\alpha} L\left(q^i + \alpha\rho^i, \dot{q}^i + \alpha\left[\frac{d\rho^i}{dt} - \dot{q}^i\frac{d\tau}{dt}\right], t + \alpha\tau\right)|_{\alpha=0} = 0$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{q}^{i\prime}(t') = \frac{dq^{i\prime}(t')}{dt'} &= \frac{dq^{i\prime}}{dt}\frac{dt}{dt'} = \left[\frac{dq^i}{dt} + \alpha\frac{d\rho^i}{dt}\right]\left(1 - \alpha\frac{d\tau}{dt}\right) + O(\alpha^2) \\ &= \dot{q}^i + \alpha\left[\frac{d\rho^i}{dt} - \dot{q}^i\frac{d\tau}{dt}\right] + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

Invarianzbedingung (unter Verwendung der Bewegungsgl.):

$$\begin{aligned} 0 &= L\frac{d\tau}{dt} + \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i}\rho^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{d\rho^i}{dt} - \dot{q}^i\frac{d\tau}{dt}\right)\right] + \frac{\partial L}{\partial t}\tau \\ &= \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\rho^i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\frac{d\tau}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}\tau \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\frac{d}{dt}\left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right) = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i - \dot{q}^i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\ddot{q}^i\right) = \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left\{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\rho^i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\tau\right\} = 0$$

$$\boxed{\text{Noether-Theorem}}$$

Invarianz der Wirkung unter kontinuierlichen Transformationen

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t' = t + \alpha\,\tau(q^i, \dot{q}^i, t) + O(\alpha^2) \\ q^i(t) &\rightarrow q^{i\prime}(t') = q^i(t) + \alpha\,\rho^i(q^j, \dot{q}^j, t) + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

führt zur Erhaltungsgröße

$$\textstyle\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\rho^i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\tau = \text{ konstant}$$

fundamentale Erkenntnis der Theor. Physik:
gilt im wesentlichen genauso für klassische Feldtheorie, QM und QFT

Bem.: in QM und QFT führen auch diskrete Symmetrien (z.B. Parität) auf Erhaltungsgrößen

kontinuierliche Symmetrietransformationen bilden eine Lie-Gruppe (→ M2)

Symmetriegruppe der klassischen Mechanik:

Galilei-Gruppe

allg. Galilei-Transformation in kart. Koordinaten:

$$\begin{aligned} x'_{ai} &= D_{ij}x_{aj} + V_{0i}t + R_{0i} & a &= 1,\ldots,N;\ i,j = 1,2,3 \\ t' &= \varepsilon t + t_0 & DD^T &= \mathbb{1};\ \varepsilon = \pm 1 \end{aligned}$$

$D_{ij}, V_{0i}, R_{0i}, t_0 \quad \longrightarrow \quad$ 3+3+3+1=10 kont. Parameter

$\longrightarrow$ 10 Erhaltungsgrößen der klassischen Mechanik

N.B.: $\varepsilon = \pm 1$ diskreter Parameter $\quad \longrightarrow \quad$ Zeitumkehr liefert keine Erhaltungsgröße

systematische Diskussion für

$$L(\vec{r}_a, \dot{\vec{r}}_a, t) = \frac{1}{2}\sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} - U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t)$$

i. Invarianz gegenüber räumlichen Translationen ($\vec{R}_0 \longrightarrow$ 3 Parameter)

$$\vec{r}_a(t) \longrightarrow \vec{r}_a^{\,\prime}(t) = \vec{r}_a(t) + \underbrace{\alpha\,\vec{d}}_{\vec{R}_0}\ , \qquad t' = t$$

$\vec{d}$ bel. konstanter Vektor, α infinit. Parameter

$\longrightarrow \quad \dot{\vec{r}}_a = \dot{\vec{r}}_a^{\,\prime} \quad \longrightarrow \quad T$ invariant

Potenzial U invariant, wenn nur von Differenzen $\vec{r}_a - \vec{r}_b$ abhängig $\quad \longrightarrow$

Translationsinvarianz: kein räumlicher Ursprung ausgezeichnet

$\rho^i = d_i,\ \tau = 0 \quad \longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{a=1}^{N}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ai}}d_i = \sum_{a=1}^{N}\vec{p}_a\cdot\vec{d}$ zeitlich konstant da $\vec{d}$ beliebig $\longrightarrow$ $\vec{P} = \sum_{a=1}^{N} \vec{p}_a$ Gesamtimpuls zeitunabhängig

ii. Invarianz gegenüber zeitlichen Translationen ($t_0 \longrightarrow$ 1 Parameter)

$$t' = t + \alpha, \quad \vec{r}_a'(t') = \vec{r}_a'(t+\alpha) = \vec{r}_a(t)$$

$\tau = 1,\ \rho^i = 0$

Wirkung invariant, wenn Potenzial U nicht explizit von der Zeit abhängt:

$$U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

$$\longrightarrow \qquad L - \textstyle\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \quad \text{konstant}$$

$$\frac{1}{2} \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} - U(\vec{r}_a) - \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} = -T - U = -E = \quad \text{konstant}$$

gilt auch noch für holonome-skleronome (also vor allem zeitunabhängige) Zwangsbedingungen

kein zeitlicher Ursprung ausgezeichnet $\longrightarrow$ Energieerhaltung

iii. Invarianz gegenüber Rotationen ($D \longrightarrow$ 3 Parameter)

$$\vec{r}_a \longrightarrow \vec{r}_a' = \vec{r}_{Da},\ t' = t$$

z.B.: (aktive) Drehung um z-Achse um Winkel α

$$\begin{pmatrix} x_a' \\ y_a' \\ z_a' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D(\alpha)} \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$$

$$D(\alpha) = \mathbb{1} + \alpha d_3 + O(\alpha^2)$$

infinitesimales α, mit $d_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad d_{3,ij} = -\varepsilon_{3ij}$

mit $\quad \vec{e}_3 \times \vec{r}_a = \vec{e}_i\, \varepsilon_{ikl}\, e_{3,k}\, x_{al} = \vec{e}_i\, \varepsilon_{i3l}\, x_{al} = -\varepsilon_{3ij}\, \vec{e}_i\, x_{aj}$

$$\begin{aligned} \vec{r}_a' &= x_{ai}' \vec{e}_i = (\delta_{ij} + \alpha d_{3,ij}) \vec{e}_i\, x_{aj} + O(\alpha^2) \\ &= \vec{r}_a - \alpha\, \varepsilon_{3ij}\, \vec{e}_i\, x_{aj} + O(\alpha^2) = \vec{r}_a + \alpha\, \vec{e}_3 \times \vec{r}_a + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

bei Drehung um beliebige Achse mit Einheitsvektor $\vec{n}$:

$$\vec{r}_a' = \vec{r}_a + \alpha \underbrace{\vec{n} \times \vec{r}_a}_{\vec{\rho}} + O(\alpha^2)$$

Noether:

$$\sum_a \vec{p}_a \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_a) = \vec{n} \cdot \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a = \vec{n} \cdot \vec{L}$$

da $\vec{n}$ bel. Einheitsvektor

$\longrightarrow$ <u>Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ erhalten</u>

wann ist Lagrangefunktion L (und daher die Wirkung S) drehinvariant?

kinetische Energie T auf jeden Fall

Potenzial U rotationsinvariant, wenn $U(\vec{r}_{Da}) = U(\vec{r}_a)$

z.B. wenn $U(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|)$ nur von Beträgen der Differenzen abhängig

keine Richtung ausgezeichnet $\longrightarrow$ <u>Drehimpulserhaltung</u>

iv. <u>Invarianz gegenüber speziellen Galilei-Transformationen</u> ($\vec{V}_0 \longrightarrow$ 3 Parameter)

$$\vec{r}_a^{\,\prime}(t) = \vec{r}_a(t) + \underbrace{\alpha\, \vec{v}_0}_{\vec{V}_0} t \,, \qquad t' = t$$

wobei $\vec{v}_0$ ein bel. konstanter Vektor ist

<u>Erweiterung des Noether-Theorems</u>:

da L nicht eindeutig, genügt für Forminvarianz der Bewegungsgl., dass

$$S[q^{i\prime}(t')] - S[q^i(t)] \qquad \text{wegunabhängig}$$

insbesondere für

$$L\frac{d\tau}{dt} + \frac{dL}{d\alpha}|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} f(q^i, t)$$

$$\longrightarrow \qquad \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\rho^i + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\tau - f(q^j, t) = \text{ konstant}$$

spezielle Galilei-Transformation:

$$L(\vec{r}_a^{\,\prime}, \dot{\vec{r}}_a^{\,\prime}) = \frac{1}{2}\sum_a m_a(\dot{\vec{r}}_a + \alpha \vec{v}_0)^2 - U(\vec{r}_a - \vec{r}_b)$$

räumliche Translationsinvarianz

$\longrightarrow$ $U(\vec{r}_a - \vec{r}_b)$ auch invariant unter speziellen Galilei-Transformationen

$\tau = 0$:

$$\frac{dL}{d\alpha}|_{\alpha=0} = \sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a \cdot \vec{v}_0 = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_0 \cdot \sum_a m_a \vec{r}_a\right) = M\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_0 \cdot \vec{R}\right)$$

$\vec{\rho} = \vec{v}_0 t$:

$$\sum_a \vec{p}_a \cdot \vec{v}_0 t - M\vec{v}_0 \cdot \vec{R} = \vec{v}_0(\vec{P}t - M\vec{R}) \qquad \text{zeitlich konstant}$$

da $\vec{v}_0$ beliebig $\longrightarrow$ $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \dfrac{\vec{P}}{M}t$

spezielle Galilei-Invarianz $\longrightarrow$ <u>Schwerpunktsatz</u>

allerdings: da räumliche Translationsinvarianz $\longrightarrow$ spezielle Galilei-Invarianz von U
$\longrightarrow$ Schwerpunktsatz folgt aus Impulserhaltung

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{M}\sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a = \frac{\vec{P}}{M} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}}{M}t$$

QFT: nicht nur Raum-Zeit-Symmetrien (Poincaré-Invarianz für relativistische QFT), auch so genannte „innere“ Symmetrien von Bedeutung (Isospin, Eichinvarianz, ...)

III.5 Nichtinertialsysteme

Übergang von IS am einfachsten in Lagrangefunktion

IS: $(O, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ festes Orthonormalsystem

NIS: $(O_B(t), \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ zeitabhängiges Orthonormalsystem

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{b}(t)$$
$$\vec{b}(t) = b_i(t)\,\vec{e}_i(t)$$

Lagrangefunktion $\qquad L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(\vec{r})$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{b}} = \dot{\vec{R}} + \dot{b}_i\,\vec{e}_i + b_i\,\dot{\vec{e}}_i$$
$$\vec{v}_B := \dot{b}_i\,\vec{e}_i, \quad \text{analog} \quad \vec{a}_B := \ddot{b}_i \vec{e}_i$$

Relation zwischen beiden Orthonormalsystemen:

$$\vec{e}_i(t) = \vec{n}_j D_{ji}(t) \quad \text{mit } D^T D = \mathbb{1} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{n}_j = D_{ji}\,\vec{e}_i$$

$D_{ji}(t)$: Matrixelemente einer zeitabhängigen orthogonalen Matrix

$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{n}_j \dot{D}_{ji} = \vec{e}_k D_{jk} \dot{D}_{ji} =: \vec{e}_k \omega_{ki}$$
$$D^T D = \mathbb{1} \qquad \longrightarrow \qquad \dot{D}_{ji} D_{jk} + D_{ji} \dot{D}_{jk} = 0 = \omega_{ki} + \omega_{ik}$$
$$\longrightarrow \qquad \omega \text{ antisymmetrische Matrix}$$

Def.: $\Omega_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{lik}\omega_{ki} \qquad \longrightarrow \qquad \omega_{ki} = \varepsilon_{ikl}\Omega_l$

$$\vec{\Omega} := \Omega_l\,\vec{e}_l \qquad \longrightarrow \qquad \vec{\Omega}\times\vec{e}_i = \Omega_l\,\vec{e}_l\times\vec{e}_i = \varepsilon_{lik}\Omega_l\,\vec{e}_k$$

daher: $\quad \dot{\vec{e}}_i = \vec{e}_k\varepsilon_{ikl}\Omega_l = \vec{\Omega}\times\vec{e}_i$

$\vec{\Omega}(t)$: Vektor der momentanen (instantanen) <u>Winkelgeschwindigkeit</u>

$$\longrightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_B + b_i\,\vec{\Omega}\times\vec{e}_i = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_B + \vec{\Omega}\times\vec{b}$$

Einsetzen in Lagrangefunktion:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \vec{v}_B + \vec{\Omega}\times\vec{b}\right)^2 - \underbrace{U(\vec{R}+\vec{b})}_{\widehat{U}(\vec{b})}$$

Interpretation:

$\vec{R}(t), \vec{\Omega}(t)$ vorgegeben (z.B. rotierende Erde)

$L(b_i, \dot{b}_i)$ als Funktion der Koord. im NIS

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m}{2}\vec{v}_B^2 + \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{b}\right)^2 + m\dot{\vec{R}}\cdot\left(\vec{v}_B + \vec{\Omega}\times\vec{b}\right) + m\vec{v}_B\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{b}\right) - \widehat{U}(\vec{b})$$

mit $\quad \dot{\vec{R}}\cdot\left(\vec{v}_B + \vec{\Omega}\times\vec{b}\right) = \dot{\vec{R}}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{R}}\cdot\vec{b}\right) - \ddot{\vec{R}}\cdot\vec{b}\,:$

$$L = \frac{m}{2}\vec{v}_B^2 + m\,\vec{v}_B\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{b}\right) + \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega}\times\vec{b}\right)^2 - m\,\vec{b}\cdot\ddot{\vec{R}} - \widehat{U}(\vec{b}) + \frac{m}{2}\dot{\vec{R}}^2 + m\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{R}}\cdot\vec{b}\right)$$

Bem.: die beiden letzten Terme tragen nicht zu Bewegungsgl. bei

Euler-Lagrange: $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{b}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial b_i} = 0$

$$m\frac{d}{dt}\left(\dot{b}_i + \varepsilon_{ijk}\Omega_j b_k\right) = m\left[\vec{v}_B\times\vec{\Omega} + \left(\vec{\Omega}\times\vec{b}\right)\times\vec{\Omega} - \ddot{\vec{R}}\right]_i - \frac{\partial\widehat{U}}{\partial b_i} \qquad |\cdot\vec{e}_i$$

$$m\,\vec{a}_B = -\frac{\partial\widehat{U}}{\partial b_i}\,\vec{e}_i - m\ddot{\vec{R}} - m\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_i\dot{\Omega}_j b_k - m\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_i\Omega_j\dot{b}_k + m\,\vec{v}_B\times\vec{\Omega} + m\left(\vec{\Omega}\times\vec{b}\right)\times\vec{\Omega}$$

wegen $\quad \vec{v}_B\times\vec{\Omega} = \dot{b}_k\Omega_j\,\vec{e}_k\times\vec{e}_j = \dot{b}_k\Omega_j\varepsilon_{kji}\,\vec{e}_i = -\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_i\Omega_j\dot{b}_k \qquad \longrightarrow \qquad$ mit $\dot{\vec{\Omega}} := \dot{\Omega}_i\,\vec{e}_i$

$$\boxed{m\,\vec{a}_B = -\frac{\partial\widehat{U}}{\partial b_i}\,\vec{e}_i \underbrace{- m\ddot{\vec{R}} - 2m\,\vec{\Omega}\times\vec{v}_B - m\,\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{b}\right) - m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{b}}_{\text{Scheinkräfte}}}$$

Scheinkräfte verschwinden für $\vec{\Omega} = 0, \quad \dot{\vec{R}} = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad$ IS zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\Omega_i\,\vec{e}_i\right) = \dot{\Omega}_i\,\vec{e}_i + \Omega_i\dot{\vec{e}}_i = \dot{\vec{\Omega}} + \Omega_i\,\vec{\Omega}\times\vec{e}_i = \dot{\vec{\Omega}}$$

<u>Diskussion für rotierende Erde</u>

$\vec{e}_1$: Osten

$\vec{e}_2$: Norden

φ: geographische Breite

Zerlegung der NIS-Basis in der IS-Basis (mit $\omega := |\vec{\Omega}|$)

Äquator ($\varphi = 0$) für $t = 0$

$$\begin{array}{llr} \vec{e}_1 & = -\cos\omega t\ \vec{n}_1 - \sin\omega t\ \vec{n}_2 & \vec{e}_1(t=0) = -\ \vec{n}_1 \\ \vec{e}_2 & = \sin\omega t\sin\varphi\ \vec{n}_1 - \cos\omega t\sin\varphi\ \vec{n}_2 + \cos\varphi\ \vec{n}_3 & \vec{e}_2(t=0) =\ \vec{n}_3 \\ \vec{e}_3 & = -\sin\omega t\cos\varphi\ \vec{n}_1 + \cos\omega t\cos\varphi\ \vec{n}_2 + \sin\varphi\ \vec{n}_3 & \vec{e}_3(t=0) =\ \vec{n}_2 \end{array}$$

Winkelgeschwindigkeit:

$$\vec{\Omega} = \omega\,\vec{n}_3 = \omega(\cos\varphi\,\vec{e}_2 + \sin\varphi\,\vec{e}_3)$$

Kontrolle:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_1 &= \vec{\Omega}\times\vec{e}_1 = \omega(\sin\varphi\,\vec{e}_2 - \cos\varphi\,\vec{e}_3) \\ \dot{\vec{e}}_2 &= \vec{\Omega}\times\vec{e}_2 = -\omega\sin\varphi\,\vec{e}_1 \\ \dot{\vec{e}}_3 &= \vec{\Omega}\times\vec{e}_3 = \omega\cos\varphi\,\vec{e}_1 \end{aligned}$$

i. <u>Trägheitskraft der Rotation</u>: $-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{b}$

da $\omega \simeq$ konstant auf der Erde:

$$\dot{\vec{\Omega}} = \omega(\cos\varphi\,\vec{\Omega}\times\vec{e}_2 + \sin\varphi\,\vec{\Omega}\times\vec{e}_3) = \vec{\Omega}\times\vec{\Omega} = 0$$

ii. <u>Trägheitskraft der Translation</u>: $-m\ddot{\vec{R}}$

$$\vec{R}(t) = R\,\vec{e}_3 \quad\longrightarrow\quad \dot{\vec{R}} = R\dot{\vec{e}}_3 = R\,\vec{\Omega}\times\vec{e}_3 \quad\longrightarrow\quad \ddot{\vec{R}} = R\,\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{e}_3)$$

$$\longrightarrow\qquad |\ddot{\vec{R}}| = O(R\omega^2)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ Tag}} = 7.3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}, \quad R = 6.4 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$$

$$\longrightarrow \qquad R\omega^2 = 3.4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-2}} \ll g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad \text{meist vernachlässigbar}$$

effektive Erdbeschleunigung:

$$\begin{aligned} -g\,\vec{e}_3 - \ddot{\vec{R}} &= -g\,\vec{e}_3 - R\,\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{e}_3) = -g\,\vec{e}_3 - R\left(\vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_3) - \omega^2\,\vec{e}_3\right) \\ &= -\vec{e}_3(g - \omega^2 R \cos^2\varphi) - \omega^2 R \sin\varphi \cos\varphi\,\vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \qquad \text{eff. Erdbeschleunigung:} \qquad g - \omega^2 R \cos^2\varphi$$

Erdbeschleunigung am Äquator um $0.034\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ kleiner als am Pol
(experimentell leicht nachweisbar)

Erdrotation um die Sonne:
$R = 1.5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}, \quad \omega \simeq \dfrac{2\pi}{\pi 10^7\,\mathrm{s}} = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}^{-1} \quad \longrightarrow \quad R\omega^2 \simeq 6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
$\longrightarrow$ noch einmal um Faktor 5 kleiner als durch Rotation der Erde

iii. <u>Zentrifugalkraft</u>: $-m\,\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{b}\right) = -m\,\vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{b}) + m\omega^2\,\vec{b}$

liegt in Ebene, die durch $\vec{\Omega}, \vec{b}$ aufgespannt wird
und $\vec{K}_Z \perp \vec{\Omega}$

für $\vec{\Omega} \perp \vec{b}$:
übliche Zentrifugalkraft $\quad m\omega^2\,\vec{b}$

Erde: $\quad |\vec{b}|\omega^2 \ll R\omega^2 \qquad$ vernachlässigbar (keine Gefahr des Abhebens!)

iv. <u>Coriolis-Kraft</u>: $-2m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}_B$

Körper auf Erdoberfläche: $\quad \vec{v}_B = v_1\,\vec{e}_1 + v_2\,\vec{e}_2$

$$\begin{aligned} \vec{K}_C &= 2m\omega(v_1\,\vec{e}_1 + v_2\,\vec{e}_2) \times (\cos\varphi\,\vec{e}_2 + \sin\varphi\,\vec{e}_3) \\ &= 2m\omega(v_1 \cos\varphi\,\vec{e}_3 - v_1 \sin\varphi\,\vec{e}_2 + v_2 \sin\varphi\,\vec{e}_1) \\ &= 2m\omega \sin\varphi(\underbrace{-v_1\,\vec{e}_2 + v_2\,\vec{e}_1}_{\perp\ \vec{v}_B}) + 2m\omega v_1 \cos\varphi\,\vec{e}_3 \qquad \text{Nordhalbkugel} \end{aligned}$$

Coriolis-Kraft normal auf $\vec{v}_B$ und $\vec{\Omega}$

nördliche	Halbkugel:	$\sin\varphi > 0$	Ablenkung nach	rechts	in Richtung $\vec{v}_B$
südliche		$\sin\varphi < 0$		links	

Punkt auf Erdoberfläche: $\quad \vec{b} = 0$

wenn $m\ddot{\vec{R}}$ vernachlässigt, Bewegungsgl. auf der Erde in guter Näherung:

$$m\,\vec{a}_B = m\,\vec{g} + 2m\,\vec{v}_B \times \vec{\Omega}$$

Coriolis-Beschleunigung:

$$2|\vec{v}_B \times \vec{\Omega}| \leq 2|\vec{v}_B| 7.3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1} \simeq 10^{-3}\,\mathrm{m\,s}^{-2} \frac{|\vec{v}_B|}{25\ \mathrm{km/h}}$$

trotzdem deutliche Auswirkungen auf Bewegung von Luft- und Wassermassen :

Drehsinn europäischer Hoch(Tief-)druckgebiete ($\rightarrow$ Kontinuumsmechanik)
rechtes Steilufer der Wolga

keine Coriolis-Kraft am Äquator, außer kleine Modifikation von g (in Richtung $\vec{e}_3$)

<u>Freier Fall auf der Erde</u>

geostationärer Fall: $\vec{v}_B(t=0) = 0$

ohne $\vec{K}_C$: $\vec{b}(t) = \vec{b}_1(t) = \vec{b}_0 - \frac{gt^2}{2}\,\vec{e}_3$ $\qquad (\vec{g} = -g\,\vec{e}_3)$

mit $\vec{K}_C$: $\vec{b}(t) = \vec{b}_1(t) + \vec{b}_2(t)$ $\qquad (|\vec{b}_2| \ll |\vec{b}_1|, \vec{b}_2(0) = \vec{0}, \dot{\vec{b}}_2(0) = \vec{0})$

da $\quad \vec{a}_B = \vec{g} + 2\,\vec{v}_B \times \vec{\Omega}$

$$\longrightarrow \quad \ddot{\vec{b}}_2 = 2\,\vec{v}_B \times \vec{\Omega} = 2\,t\,\vec{g} \times \vec{\Omega} + O(\dot{b}_2\omega)$$

$$\longrightarrow \quad \vec{b}_2(t) = \frac{t^3}{3}\,\vec{g} \times \vec{\Omega} = -\frac{g}{3}\omega t^3\,\vec{e}_3 \times (\cos\varphi\,\vec{e}_2 + \sin\varphi\,\vec{e}_3)$$

$$= \underbrace{\frac{g}{3}\omega t^3 \cos\varphi}_{>0}\,\vec{e}_1 \qquad \text{Abweichung nach Osten}$$

$g\omega = 9.81\,\mathrm{m\,s}^{-2}\ 7.3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1} = 7.1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m\,s}^{-3}$

Stein aus 100 m Höhe:

$$T \simeq \sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad \longrightarrow \qquad |\vec{b}_2| = \frac{g\omega}{3}\cos\varphi\left(\frac{2H}{g}\right)^{3/2} = 2.2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\cos\varphi$$

Ablenkung um $2.2\cos\varphi$ cm nach Osten

Übung: Foucaultsches Pendel

IV Kleine Schwingungen

kleine Schwingungen $\simeq$ harmonische Oszillatoren $\leftarrow$ lineares System

häufiges Problem: System in der Nähe einer Gleichgewichtslage
$\longrightarrow$ in 1. Näherung kleine Oszillationen um diese Lage

Beispiele:

- Pendel, Federkraft, ... (Kraft $\sim$ Auslenkung aus der Ruhelage)
- elektrischer Schwingkreis $\longrightarrow$ elektrische Wellen ($\rightarrow$ T3)
- Moleküle $\longrightarrow$ Schwingungsspektren
- Kristall $\longrightarrow$ Phononen
- QFT: Schwingungen um Grundzustand („Vakuum")

  $\longrightarrow$ harmonische Anregungen $\equiv$ Teilchen:
  Photonen, Phononen, Magnonen (Spinwellen), ...
- nichtlineare Oszillationen oft völlig andere Struktur (Chemie, Biologie)

Harmonischer Oszillator
grundlegendes Element der klassischen und der Quantenphysik

System mit f Freiheitsgraden

$$\vec{r}_a(q^1, \ldots, q^f), \qquad \dot{\vec{r}}_a = \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i}\dot{q}^i$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_a m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_a m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i}\dot{q}^i \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^j}\dot{q}^j \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f} \dot{q}^i\dot{q}^j \sum_a m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^j} =: \frac{1}{2}\, t_{ij}(q^k)\dot{q}^i\dot{q}^j \end{aligned}$$

Lagrangefunktion

$$L(q^i, \dot{q}^i) = \frac{1}{2}\, t_{ij}(q^k)\dot{q}^i\dot{q}^j - U(q^k)$$

Gleichgewichtszustand:

Lösung der Bewegungsgl. der Form

$$q^i(t) = q_0^i \quad \forall\, t \qquad (i = 1, \ldots, f)$$

$$\longrightarrow \qquad \dot{q}^i(t) = \ddot{q}^i(t) = 0$$

$$\boxed{\text{Gleichgewichtslage} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial q^i}|_{q^i=q_0^i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, f)}$$

Beweis:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}}_{O(\dot{q}^i)} - \underbrace{\frac{\partial T}{\partial q^i}}_{O(\dot{q}^{i\,2})} + \frac{\partial U}{\partial q^i} = 0$$

IV.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

$L = \frac{1}{2}\, t(q)\dot{q}^{\,2} - U(q)$

Taylorentwicklung um $q = q_0$

$$U(q) = U(q_0) + \frac{dU}{dq}|_{q=q_0}(q - q_0)$$
$$+\frac{1}{2}(q-q_0)^2\frac{d^2U}{dq^2}|_{q=q_0} + \underbrace{O\left[(q-q_0)^3\right]}_{\text{anharmonische Terme}}$$

Oszillator-Näherung: $t(q) = t(q_0) =: m$

$$\longrightarrow \quad L_O = \frac{m}{2}\dot{q}^{\,2} - U(q_0) - \frac{1}{2}(q-q_0)^2\frac{d^2U}{dq^2}|_{q=q_0}$$

Vor.: Minimum des Potenzials bei $q = q_0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2U}{dq^2}|_{q=q_0} > 0$

Def.: $\frac{d^2U}{dq^2}|_{q=q_0} =: m\omega_0^2 \quad (\omega_0 > 0), \quad q - q_0 = \eta \quad \longrightarrow \quad \dot{q} = \dot{\eta}$

Lagrangefunktion des harmonischen Oszillators (ohne irrelevante Konstante $U(q_0)$):

$$L_O(\eta, \dot{\eta}) = \frac{m}{2}\dot{\eta}^{\,2} - \frac{1}{2}m\omega_0^2\eta^2$$

Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0 = m\ddot{\eta} + m\omega_0^2\eta$$

häufige realistischere Situation: zusätzliche „Reibungskraft“
allgemeiner dissipative Kraft: Reibung, Ohmscher Widerstand, ...

$$K_R = -2m\rho\dot{\eta} \qquad (\rho > 0)$$

meist vernünftige Näherung für kleine Schwingungen

Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator ($f = 1$) mit Reibung :

$$\ddot{\eta} + 2\rho\dot{\eta} + \omega_0^2\eta = 0$$

Energiebilanz: $\frac{dE}{dt} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\eta}^2 + \omega_0^2\eta^2\right) = m\dot{\eta}\left(\ddot{\eta} + \omega_0^2\eta\right) = -2m\rho\dot{\eta}^2 < 0$

Dissipation $\longrightarrow$ nichtkonservatives System für $\rho \neq 0$

lineare, homogene Diffgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ($\rightarrow$ Analysis, M1)

Standardverfahren: Ansatz $\eta(t) = ae^{\lambda t}$

$$\ddot{\eta} + 2\rho\dot{\eta} + \omega_0^2\eta = 0 = ae^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 2\rho\lambda + \omega_0^2\right)$$

$\longrightarrow$ algebraische Gleichung für λ mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$$

allgemeine Lösung der Bewegungsgl. (2 Integrationskonstanten)

$$\begin{aligned} \lambda_1 \neq \lambda_2 \ (\rho \neq \omega_0): \quad \eta(t) &= \operatorname{Re}\left\{a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}\right\} && (a_i \in \mathbb{C}) \\ \lambda_1 = \lambda_2 \ (\rho = \omega_0): \quad \eta(t) &= e^{-\rho t}(b_1 + b_2 t) \quad \text{aperiodischer Grenzfall} && (b_i \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Folgerung: Linearität und Homogenität der Diffgl. $\longrightarrow$

allgemeine Lösung ist eine Linearkombination von 2 linear unabhängigen Lösungen

Diskussion für

$$\underline{\lambda_1 \neq \lambda_2}$$

i. Starke Dämpfung: $\rho > \omega_0 \longrightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \eta(t) &= e^{-\rho t}\left(a_1 e^{\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\,t} + a_2 e^{-\sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\,t}\right) \\ &\overset{t \gg (\rho^2-\omega_0^2)^{-1/2}}{\longrightarrow} a_1 e^{-t\left[\rho - \sqrt{\rho^2-\omega_0^2}\right]} \qquad (a_i \in \mathbb{R},\ a_1 \neq 0) \end{aligned}$$

exponentieller Abfall

ii. Schwache Dämpfung: $\rho < \omega_0 \longrightarrow \lambda_{1,2}$ komplex konjugiert

Def.: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} > 0$ o.B.d.A $\longrightarrow$ $\lambda_{1,2} = -\rho \pm i\omega$

$$\eta(t) = e^{-\rho t}\left(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t\right) \qquad (c_i \in \mathbb{R})$$

gedämpfte harmonische Schwingung

$\rho = 0$: ungedämpfter harmonischer Oszillator

Kreisfrequenz ω, Frequenz ν, Periode (Schwingungsdauer) T:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Sphärisches Pendel in Oszillatornäherung

zur Erinnerung: $T = \frac{m}{2} l^2 \left(\dot\theta^{\,2} + \dot\varphi^{\,2} \sin^2\theta \right)$, $U = mgl(1-\cos\theta)$

effektives Potenzial $(E = T_1 + U_{\text{eff}},\ T_1 = \frac{m}{2} l^2 \dot\theta^{\,2})$

$$U_{\text{eff}} = \frac{L_z^2}{2ml^2\sin^2\theta} + mgl(1-\cos\theta)$$

a) $L_z = 0$: ebenes Pendel $\longrightarrow$ $\varphi = \text{konstant}$

$$U_{\text{eff}}(\theta) = U(\theta) = \underbrace{U(0)}_{0} + \frac{1}{2}\theta^2 \frac{d^2U}{d\theta^2}(0) + O(\theta^4)$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mgl\cos\theta \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2U}{d\theta^2}(0) = mgl$$

Lagrangefunktion

$$L_O = \frac{m}{2} l^2 \left(\dot\theta^{\,2} - \frac{g}{l}\theta^2 \right) \qquad (\eta = l\theta)$$

$\longrightarrow$ ungedämpfte Schwingungen: $\omega_0^2 = \frac{g}{l},\ \rho = 0$

$\longrightarrow$ Frequenz unabhängig von der Masse

allg. Lösung mit Anfangsbedingungen

$$\theta(t) = \theta(0)\cos\omega_0 t + \frac{\dot\theta(0)}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

b) $L_z \neq 0$

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{a}{\sin^2\theta} + b(1-\cos\theta)$$

$$a = \frac{L_z^2}{2ml^2} > 0, \quad b = mgl > 0$$

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{d\theta} = -\frac{2a\cos\theta}{\sin^3\theta} + b\sin\theta$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0} = \frac{2a}{b} > 0 \quad \longrightarrow \quad 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^2U_{\text{eff}}}{d\theta^2} = 2a\frac{1+2\cos^2\theta}{\sin^4\theta} + b\cos\theta \overset{\theta=\theta_0}{=} b\frac{1+3\cos^2\theta_0}{\cos\theta_0}$$

mit $\eta = l(\theta - \theta_0)$

$$L_O = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - U_{\text{eff}}(\theta_0) - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2 U''_{\text{eff}}(\theta_0) \simeq \frac{m}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{m}{2}\omega_0^2 \eta^2$$

$$\longrightarrow \qquad \omega_0^2 = \frac{b}{ml^2}\frac{1 + 3\cos^2\theta_0}{\cos\theta_0} = \frac{g}{l}\frac{1 + 3\cos^2\theta_0}{\cos\theta_0} \geq 2\sqrt{3}\,\frac{g}{l}$$

$\longrightarrow$ Frequenz hängt von der Masse über θ_0 ab (Unterschied zum ebenen Pendel!)

allgemeine Lösung für θ : $\qquad \theta(t) = \theta_0 + a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \sin\omega_0 t$

Lösung für φ:

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{ml^2 \sin^2\theta} = \frac{2a}{\sin^2\theta} = \frac{2a}{\sin^2\theta_0} - \frac{4a\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}(\theta - \theta_0) + O(\eta^2)$$

<u>allgemeine Lösung des sphärischen Pendels in Oszillatornäherung</u>:

$$\begin{aligned} \theta(t) &\simeq \theta_0 + a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \sin\omega_0 t \\ \varphi(t) &\simeq \varphi_0 + \frac{2a}{\sin^2\theta_0} t - \frac{2b\sin\theta_0}{\omega_0}(a_1 \sin\omega_0 t - a_2 \cos\omega_0 t) \end{aligned}$$

$\varphi(t)$: Oszillation, die einer gleichförmigen Kreisbewegung überlagert ist

N.B.: θ_0 ist **keine** Integrationskonstante (hängt von L_z ab)

Integrationskonstanten: $\quad a_1, a_2, \varphi_0, L_z \qquad \longrightarrow \qquad \theta(0), \dot{\theta}(0), \varphi(0), \dot{\varphi}(0)$

<u>elektrischer Schwingkreis</u> ($\rightarrow$ T3)

Ladung $Q(t)$, äußere Spannung U_a

Strom $I(t) = \dot{Q}(t)$

Ohmscher Widerstand R

Selbstinduktion L, Kapazität C

1. Kirchhoffsches Gesetz:

$$L\ddot{Q} + R\,\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_a$$

$$Q \longrightarrow \eta, \; \frac{R}{L} \longrightarrow 2\rho, \; \frac{1}{LC} \longrightarrow \omega_0^2 \quad \text{(Thomsonsche Formel)}$$

gedämpfter ($R \neq 0$) harmonischer Oszillator unter Einfluss einer äußeren Kraft

IV.2 Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen

Linearisierung eines allgemeinen Problems mit f Freiheitsgraden

Entwicklung um Gleichgewichtslage q_0^i $(i = 1, \ldots, f)$ mit $\frac{\partial U}{\partial q^i}|_{q^i = q_0^i} = 0$

$$L(q^i, \dot{q}^i) = \frac{1}{2}\, t_{ij}(q^k)\dot{q}^i\dot{q}^j - U(q^k) = \frac{1}{2}\left(M_{ij}\dot{\eta}^i\dot{\eta}^j - K_{ij}\eta^i\eta^j\right) - U(q_0^i) + O(\eta^3)$$

mit

$$\eta^i = q^i - q_0^i, \quad M_{ij} = M_{ji} = t_{ij}(q_0^k), \quad K_{ij} = K_{ji} = \frac{\partial^2 U}{\partial q^i \partial q^j}|_{q^k = q_0^k}$$

Euler-Lagrange

$$M_{ij}\ddot{\eta}^j + K_{ij}\eta^j = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, f)$$

lineares System: f lineare, hom. Diffgl. 2. Ordnung mit konst. Koeff. ($\rightarrow$ Analysis, M1)

Positivität von T:

$$M_{ij} = \sum_a m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^j}|_{q^k = q_0^k} \qquad \longrightarrow \qquad M_{ij}a^i a^j = \sum_a m_a |a^i \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q^i}|^2 > 0$$

wegen linearer Unabhängigkeit der f Vektoren $\partial \vec{r}_a / \partial q^i$ (für jedes a und $i = 1, \ldots, f$), für beliebigen reellen Vektor $\vec{a} = (a^1, \ldots, a^f) \neq \vec{0}$

$\longrightarrow$ M positiv definite Matrix

Minimum des Potenzials: $K_{ij}a^i a^j \geq 0$

$\longrightarrow$ K semi-positiv definite Matrix

Standardansatz im Komplexen: $\eta = v e^{i\omega t}$ $(\eta, v \in \mathbb{C}^f)$

physikalische Lösung durch Real- oder Imaginärteil

$$-\omega^2 M_{ij} v^j + K_{ij} v^j = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad (K - \omega^2 M)v = 0$$

notwendige Bedingung für nichttriviale Lösung $v \neq 0$: $\det(K - \omega^2 M) = 0$

Säkulargleichung (charakteristische Gleichung)

algebraische Gleichung f-ter Ordnung in ω^2

$\longrightarrow$ f Lösungen ω_α^2 (Eigenwerte) mit

(f-dim.) Eigenvektoren v_α : $(K - \omega_\alpha^2 M)v_\alpha = 0$ (ohne $\sum_\alpha$)

Eigenwertproblem für positiv definite Matrizen:

i. $\omega_\alpha^2 \geq 0$ $\longrightarrow$ $v_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$ ungedämpfte Schwingungen

ii. v_α können immer reell gewählt werden

iii. v_α $(\alpha = 1, \ldots, f)$ linear unabhängiges Basissystem in $\mathbb{R}^f$

allgemeine Lösung: Realteil einer Linearkombination der $2\,f$ Lösungen

$v_\alpha e^{\pm i\omega_\alpha t}$ $\longrightarrow$ $2f$ Integrationskonstanten

ω_α	Eigenfrequenzen des linearen Systems
$\eta_\alpha(t) = v_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$	Eigenschwingungen „

<u>Normalkoordinaten</u>

mögliche Normierung der Eigenvektoren (da M pos. def.): $v^i_\alpha M_{ij} v^j_\beta = \delta_{\alpha\beta}$

Def. der Normalkoord. Q_α : $\quad \eta(t) = \sum_{\alpha=1}^{f} Q_\alpha(t) v_\alpha$

$$\longrightarrow \qquad v^i_\alpha M_{ij} \eta^j(t) = v^i_\alpha M_{ij} Q_\beta(t) v^j_\beta = \delta_{\alpha\beta} Q_\beta(t) = Q_\alpha(t)$$

$$L_O = \frac{1}{2}\left(M_{ij}\dot\eta^i\dot\eta^j - K_{ij}\eta^i\eta^j\right) = \frac{1}{2}(\dot Q_\alpha \dot Q_\beta M_{ij} v^i_\alpha v^j_\beta - Q_\alpha Q_\beta v^i_\alpha \underbrace{K_{ij} v^j_\beta}_{\omega^2_\beta M_{ij} v^j_\beta}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{f}\left(\dot Q^2_\alpha - \omega^2_\alpha Q^2_\alpha\right)$$

$\longrightarrow \qquad f$ entkoppelte harmonische Oszillatoren

$$\ddot Q_\alpha + \omega^2_\alpha Q_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots, f)$$

<u>Spezialfall</u>: $\omega_\alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad Q_\alpha(t) = a_\alpha + b_\alpha t \quad$ aperiodischer Grenzfall

Anwendung: <u>lineares 3-atomiges Molekül ($f = 3$)</u>

„CO_2-Molekül“

Vor.: nur Wechselwirkung zwischen
nächsten Nachbarn berücksichtigt

Gleichgewicht: $x^0_2 - x^0_1 = x^0_3 - x^0_2 = d$ $\qquad$ Vor.: $V(-x) = V(x)$

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2, x_3) &= V(x_2 - x_1) + V(x_2 - x_3) \\ &= 2V(d) + \frac{1}{2}V''(d)(x_2 - x_1 - d)^2 + \frac{1}{2}V''(d)(x_3 - x_2 - d)^2 + \dots \end{aligned}$$

mit $\quad x_i = x^0_i + \eta_i, \qquad k := V''(d) > 0$

$$L_O = \frac{m}{2}\left(\dot\eta^2_1 + \dot\eta^2_3\right) + \frac{m_2}{2}\dot\eta^2_2 - \frac{k}{2}\left[(\eta_2 - \eta_1)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2\right]$$

Translationsinvarianz erfüllt: $\quad L$ invariant unter $\eta_i \to \eta_i + a$

$\longrightarrow \qquad Q_3 = \frac{1}{m_2 + 2m}\left[m(\eta_1 + \eta_3) + m_2\eta_2\right] \qquad$ Schwerpunktskoord.

Def.: $\quad y_i = \eta_i - Q_3 \quad \longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{3} m_i y_i = m(y_1 + y_3) + m_2 y_2 = 0$

eliminieren $\quad y_2 = -\frac{m}{m_2}(y_1 + y_3)$ in L_O: $\qquad M_S = 2m + m_2$

$$L_O = \frac{m}{2}\left(\dot y^2_1 + \dot y^2_3\right) + \frac{m_2}{2}\dot y^2_2 + \frac{M_S}{2}\dot Q^2_3 - \frac{k}{2}\left[(y_2 - y_1)^2 + (y_3 - y_2)^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \frac{m}{2}\left[\left(1+\frac{m}{m_2}\right)(\dot{y}_1^2+\dot{y}_3^2)+\frac{2m}{m_2}\dot{y}_1\dot{y}_3\right]+\frac{M_S}{2}\dot{Q}_3^2 \\
& -\frac{k}{2}\left[\left(1+\frac{2m}{m_2}+\frac{2m^2}{m_2^2}\right)(y_1^2+y_3^2)+4y_1y_3\frac{m}{m_2}\left(1+\frac{m}{m_2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Schwerpunktbewegung absepariert durch Koordinatentransformation $\eta_1,\eta_2,\eta_3 \longrightarrow y_1,y_3,Q_3$

$$
Q_3(t) = Q_3(0)+\dot{Q}_3(0)t \qquad\qquad \text{Normalkoord. mit } \ \omega_3 = 0
$$

2-dimensionales lineares System mit Koord. y_1, y_3 bleibt zu lösen:

$$
M = \begin{pmatrix} m\left(1+\frac{m}{m_2}\right) & \frac{m^2}{m_2} \\ \frac{m^2}{m_2} & m\left(1+\frac{m}{m_2}\right) \end{pmatrix} \;, \quad K = k\begin{pmatrix} 1+\frac{2m}{m_2}+\frac{2m^2}{m_2^2} & \frac{2m}{m_2}\left(1+\frac{m}{m_2}\right) \\ \frac{2m}{m_2}\left(1+\frac{m}{m_2}\right) & 1+\frac{2m}{m_2}+\frac{2m^2}{m_2^2} \end{pmatrix}
$$

Notation:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= m\left(1+\frac{m}{m_2}\right), & M_2 &= \frac{m^2}{m_2} \\
K_1 &= k\left(1+\frac{2m}{m_2}+\frac{2m^2}{m_2^2}\right), & K_2 &= k\frac{2m}{m_2}\left(1+\frac{m}{m_2}\right)
\end{aligned}
$$

<u>Säkulargleichung:</u>

$$
\det(K-\omega^2 M) = \begin{vmatrix} K_1-\omega^2 M_1 & K_2-\omega^2 M_2 \\ K_2-\omega^2 M_2 & K_1-\omega^2 M_1 \end{vmatrix} = \left(K_1-\omega^2 M_1\right)^2 - \left(K_2-\omega^2 M_2\right)^2 = 0
$$

<u>Lösungen:</u>

$$
K_1 - \omega_{1,2}^2 M_1 = \mp\left(K_2-\omega_{1,2}^2 M_2\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{m_2}\right) \\
\omega_2^2 &= \frac{k}{m} < \omega_1^2
\end{aligned}
$$

$$
(K-\omega^2 M)v = 0 \qquad \longrightarrow \qquad v_1 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

Normalkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= v_1^i M_{ij} y_j \sim y_1 + y_3 \\
Q_2 &= v_2^i M_{ij} y_j \sim y_1 - y_3 \\
Q_3 &= \left[m(\eta_1+\eta_3)+m_2\eta_2\right]/M_S
\end{aligned}
$$

Normalschwingungen:

$$\begin{array}{llllll} & & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \omega^2 \\ Q_1 \neq 0, Q_2 = Q_3 = 0: & \eta_1 = \eta_3, \eta_2 = -\frac{2m}{m_2}\eta_1 & & & & \frac{k}{m}\left(1+\frac{2m}{m_2}\right) \\ Q_2 \neq 0, Q_1 = Q_3 = 0: & \eta_1 = -\eta_3, \eta_2 = 0 & & & & \frac{k}{m} \\ Q_3 \neq 0, Q_1 = Q_2 = 0: & \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 & & & & 0 \end{array}$$

$Q_\alpha(t) = a_\alpha \cos\omega_\alpha t + b_\alpha \sin\omega_\alpha t \quad (\alpha = 1, 2), \qquad Q_3(t) = a_3 + b_3 t$

<u>allgemeine Lösung für Auslenkungen</u> (Normierung: $Q_1 = y_1 + y_3,\ Q_2 = y_1 - y_3$)

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) + Q_3 \\ \eta_2 &= -\frac{m}{m_2}Q_1 + Q_3 \\ \eta_3 &= \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2) + Q_3 \end{aligned}$$

6 Integrationskonstante $\quad a_\alpha, b_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$

Übung: Doppelpendel

IV.3 Lineares System mit äußeren Kräften

Beschränkung auf $f = 1$

$$m\ddot{\eta} + 2m\rho\dot{\eta} + m\omega_0^2\eta = K(t) \qquad \text{äußere Kraft}$$

i. Periodische äußere Kraft

Beispiel: Wechselspannung im elektrischen Schwingkreis

$$K(t) = K_0 \cos\omega t$$

leichter im Komplexen zu lösen $\quad\longrightarrow\quad$ am Ende Realteil nehmen

$$\begin{array}{rclcl} \eta(t) & \longrightarrow & z(t), & & \eta(t) = \mathrm{Re}\, z(t) \\ K(t) & \longrightarrow & K_0 e^{i\omega t}, & & K(t) = K_0 \mathrm{Re}\, e^{i\omega t} \end{array}$$

$$\ddot{z} + 2\rho\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{K_0}{m}e^{i\omega t} \qquad (\text{Vor.}: \rho < \omega_0)$$

allg. Lösung einer linearen, inhomogenen Diffgl.:

eine spezielle inhomogene + **allgemeine** homogene Lösung

homogene Lösung = gedämpfte Schwingung:

$$z_h(t) = z_1 e^{\lambda_1 t} + z_2 e^{\lambda_2 t} \qquad \lambda_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2} =: -\rho \pm i\,\overline{\omega}$$

Ansatz für spezielle inhom. Lösung: $\qquad z_s(t) = Ae^{i\omega t}$

$$A\left(-\omega^2 + 2i\,\rho\omega + \omega_0^2\right)e^{i\omega t} = \frac{K_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$\longrightarrow A = \frac{K_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\,\rho\omega)}$$

allg. Lösung: $\qquad z(t) = Ae^{i\omega t} + z_1 e^{\lambda_1 t} + z_2 e^{\lambda_2 t}$

$t \to \infty$: homogene Lösung $z_h(t)$ klingt mit $e^{-\rho t}$ ab

$\longrightarrow$ allg. Lösung geht nach Einschwingvorgang immer in die durch $K(t)$ erzwungene spezielle Lösung über

$\longrightarrow$ Anfangsbedingungen (stecken in z_1, z_2) werden „vergessen“

Polarzerlegung: $\quad A = |A|e^{i\,\delta} \quad \longrightarrow \quad \eta_s(t) = \mathrm{Re}(Ae^{i\omega t}) = |A|\cos(\omega t + \delta)$

$$|A|^2 = \frac{K_0^2}{m^2\left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\rho^2\omega^2\right]} \qquad\qquad \tan\delta = \frac{2\rho\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Maximum von $|A|^2$ bei $\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 - 2\rho^2 \qquad$ (Vor.: $2\rho^2 < \omega_0^2$)

$$|A|^2 = \frac{1}{2}|A|_{\max}^2 \text{ bei } \omega_\pm^2 = \omega_0^2 - 2\rho^2 \pm 2\rho\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$$

schwache Dämpfung: $\qquad 0 < \rho \ll \omega_0 : \quad \omega_{\max} \simeq \omega_0,\ \omega_\pm = \omega_0 \pm \rho$

$\omega \to \omega_0$: Resonanz $\qquad \longrightarrow \qquad$ maximale Amplitude

$$|A|_{\max}^2 = \frac{K_0^2}{4m^2\rho^2(\omega_0^2 - \rho^2)} \simeq \frac{K_0^2}{4m^2\rho^2\omega_0^2}$$

Folgerung: Maximum umso höher und schmäler, je kleiner die Dämpfung ρ („Resonanzkatastrophe“)

Phasenverschiebung: Phase der erzwungenen Schwingung $\eta_s(t)$ hinkt der Kraft $K(t)$ stets nach ($\delta < 0$); δ geht umso rascher von 0 nach $-\pi$ (für $\omega \gg \omega_0$), je kleiner die Dämpfung ρ

Frage: warum tritt dieses Resonanzverhalten in der Physik sehr häufig auf, auch wenn die äußere Kraft nicht rein periodisch ist?

ii. Fourieranalyse und Green-Funktion

allgemeine Form der Bewegungsgl. (im Komplexen)

$$m\ddot{z} + 2m\rho\dot{z} + m\omega_0^2 z = K(t)$$

Vor.: $|K(t)|$ fällt genügend stark ab für $t \to \pm\infty$

genauer:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, |K(t)| < \infty \quad \leftrightarrow \quad K(t) \in L_1(-\infty, \infty)$$

Analysis: $K(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ $\quad\exists$ Fouriertransformierte $\tilde{K}(\omega)$

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t}\, K(t) \quad \text{mit Umkehrung} \quad K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\, \tilde{K}(\omega)$$

Frequenzspektrum der äußeren Kraft

wenn $|\tilde{K}(\omega)|^2$ bei ω_i konzentriert

$\longrightarrow$ Resonanzverhalten für $\omega \sim \omega_i$

wichtige Konsequenz der Linearität der Diffgl.

$$m\ddot{z} + 2m\rho\dot{z} + m\omega_0^2 z = K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\, \tilde{K}(\omega)$$

für $K(t) = e^{i\omega t}$ Lösung bereits bekannt:

$$z_s^{(\omega)} = \frac{e^{i\omega t}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega)} =: \frac{e^{i\omega t}}{m}\sqrt{2\pi}\tilde{G}(\omega)$$

daher spezielle Lösung für obige Diffgl.

$$z_s(t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \tilde{K}(\omega)\, \frac{e^{i\omega t}}{m}\sqrt{2\pi}\tilde{G}(\omega)$$

$$= \frac{1}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\,\tilde{G}(\omega)\tilde{K}(\omega) = \frac{1}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\,\tilde{G}(\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dse^{-i\omega s}\,K(s)$$

$$= \frac{1}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\,G(t-s)K(s) \qquad \text{mit} \qquad G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\,\tilde{G}(\omega)$$

$\boxed{G(t)\text{: Green-Funktion der linearen Differentialgleichung}}$

Bedeutung: wenn Green-Funktion bekannt $\longrightarrow$ spezielle Lösung der inhomogenen Diffgl. durch einfache Integration (Faltung)

$$z_s(t) = \frac{1}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\,G(t-s)K(s)$$

weit verbreitetes Verfahren der Theor. Physik, insbesondere für alle linearen Diffgl. mit konstanten Koeffizienten anwendbar

Bem.: Green-Funktion $G(t)$ nicht eindeutig,
da nur bis auf homogene Lösung der Diffgl. bestimmt

Berechnung der Green-Funktion für den harmonischen Oszillator

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\,\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega}$$

Standardmethode für Integrale dieses Typs: komplexe Integration

$$\text{Integrand} \quad f(\omega) = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega)}$$

$f(\omega)$ meromorphe Funktion der komplexen Variable ω:

einfache Pole bei $\omega_{1,2}(= i\lambda_{1,2}) = i\rho \pm \overline{\omega}$ mit $\overline{\omega}^2 = \omega_0^2 - \rho^2 > 0$

$$e^{i\omega t} = e^{it(\mathrm{Re}\,\omega + i\,\mathrm{Im}\omega)}$$

$$= e^{-t\mathrm{Im}\,\omega}\, e^{it\mathrm{Re}\,\omega}$$

$\underline{t<0}$: Cauchyscher Integralsatz

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) = \oint_{C_1} d\omega f(\omega) = 0$$

$\underline{t>0}$: Residuensatz

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) = \oint_{C_2} d\omega f(\omega) = 2\pi i \sum_i R_i$$

für einfache Pole: $\quad R_i = \lim_{\omega\to\omega_i} (\omega-\omega_i) f(\omega)$

$$f(\omega) = \frac{-e^{i\omega t}}{2\pi(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)} \quad \longrightarrow \quad R_i = \frac{e^{i\omega_i t}}{2\pi(\omega_j-\omega_i)} \qquad (j\neq i)$$

Ergebnis: <u>Green-Funktion des harmonischen Oszillators</u>

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(\omega) = \theta(t)\frac{2\pi i}{4\pi\overline{\omega}} e^{-\rho t}\left(e^{-i\overline{\omega}t} - e^{i\overline{\omega}t}\right) = \theta(t) e^{-\rho t}\frac{\sin\overline{\omega}t}{\overline{\omega}}$$

mit Stufenfunktion

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

<u>Interpretation der Green-Funktion $G(t)$</u>

$$\ddot{G} + 2\rho\dot{G} + \omega_0^2 G = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\frac{-\omega^2 + 2i\rho\omega + \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\rho\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} =: \delta(t)$$

Diracsche <u>Delta-"Funktion" $\delta(t)$</u> $= \delta(-t)$

Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\,\tilde{K}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i\omega s} K(s) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds K(s)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-s)} = \int_{-\infty}^{\infty} ds K(s)\delta(t-s) \end{aligned}$$

<u>Distribution $\delta(t)$</u> ($\to$ M2)

lineares Funktional auf einem geeigneten Funktionenraum

$$K(s) \quad \longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} ds K(s)\delta(s) = K(0) \qquad \text{zugeordnet}$$

sicher keine Funktion im üblichen Sinn:

$$\delta(s) = 0 \quad \text{für} \quad s \neq 0, \quad \text{aber} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\delta(s) = 1$$

δ-Distribution kann durch Funktionenfolge dargestellt werden:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) K(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x) K(x) = K(0)$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ \ \forall x \neq 0, \quad \text{und} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx f_n(x) = 1 \ \ \forall n$$

Beispiele:

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}, \quad ne^{-\pi n^2 x^2}, \quad \frac{n}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{nx}\right)^2$$

wichtige Eigenschaften:

$$\delta(x) = \delta(-x) \qquad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$x\delta(x) = 0 \qquad \delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} \qquad \text{für einfache Nullstellen } x_i$$

$$\int dx\delta'(x) f(x) = -f'(0) \qquad \text{partielle Integration}$$

<u>Sprechweise der Physik</u>:

$G(t)$ löst inhom. Diffgl. für den „instantanen“ Kraftstoß $\delta(t)$

$\longrightarrow$ jede Kraft als Überlagerung solcher Kraftstöße darstellbar

$$K(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ds\delta(t-s)K(s) \qquad \longrightarrow \qquad z_s(t) = \frac{1}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dsG(t-s)K(s)$$

IV.4 Rasch oszillierende äußere Kräfte

Diskussion nicht auf kleine Schwingungen beschränkt, aber für $f = 1$ Freiheitsgrad

$$m\ddot{q} = -\frac{dU}{dq} + k(q,t)$$

mit einer „rasch“ oszillierenden Kraft

$$k(q,t) = k_1(q)\cos\omega t + k_2(q)\sin\omega t$$

rasch oszillierend: $\quad \omega \gg 2\pi/T$

wobei T die charakteristische Periode einer gebundenen Bewegung für $k(q,t) \equiv 0$ ist

Erwartung: kleine Oszillationen um Trajektorie im Potenzial U

<u>Ansatz</u>:

$$q(t) = Q(t) + \xi(t) \qquad \text{mit „kleiner" Amplitude } \xi(t)$$

„große" Amplitude $Q(t)$: mittlere Lage des Teilchens, gemittelt über die kurze Periode $2\pi/\omega$

andererseits: $$\overline{\xi(t)} := \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt' \xi(t+t') = 0$$

Entwicklung für kleine ξ:

$$m\ddot{Q} + m\ddot{\xi} = -U'(Q) - \xi U''(Q) + k(Q,t) + \xi k'(Q,t) + O(\xi^2)$$

zeitlicher Mittelwert über kurze Periode

$$\begin{aligned} m\ddot{Q} &= -U'(Q) + \overline{\xi k'(Q,t)} \\ \longrightarrow \qquad m\ddot{\xi} &= k(Q,t) - \underbrace{\xi U''(Q) + \xi k'(Q,t) - \overline{\xi k'(Q,t)}}_{\text{klein von } O(\xi)} \\ \longrightarrow \qquad m\ddot{\xi} &= k_1(Q)\cos\omega t + k_2(Q)\sin\omega t + O(\xi) \\ \dot{\xi} &= \frac{1}{m\omega}\left(k_1 \sin\omega t - k_2\cos\omega t\right) \qquad \longrightarrow \qquad \xi(t) = -\frac{k(Q,t)}{m\omega^2} \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung für große Amplitude

$$m\ddot{Q} = -U'(Q) - \frac{1}{m\omega^2}\overline{kk'} =: -U'_{\text{eff}}(Q)$$

mit $\quad kk' = \frac{1}{2}\left(k^2\right)'$, $\overline{\sin^2\omega t} = \overline{\cos^2\omega t} = \frac{1}{2}$, $\overline{\sin\omega t\cos\omega t} = 0$:

$$U_{\text{eff}}(Q) = U(Q) + \frac{1}{2m\omega^2}\overline{k^2(Q,t)} = U(Q) + \frac{k_1^2(Q) + k_2^2(Q)}{4m\omega^2}$$

Bem.: $\dfrac{k_1^2(Q) + k_2^2(Q)}{4m\omega^2} = \dfrac{m}{2}\overline{\dot{\xi}^2}$ mittlere kinetische Energie der Oszillationen

Beispiel: <u>ebenes Pendel mit vertikal oszillierendem Aufhängepunkt</u>

$$x = l\sin\theta \qquad\qquad a \ll l$$

$$z = l\cos\theta + a\cos\omega t \qquad \omega \gg \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\dot{x} = l\cos\theta\dot{\theta}, \qquad \dot{z} = -l\sin\theta\dot{\theta} - a\omega\sin\omega t$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz \\ &= \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + 2a\omega l\sin\theta\dot{\theta}\sin\omega t\right) + mgl\cos\theta + \frac{m}{2}a^2\omega^2\sin^2\omega t + mga\cos\omega t \\ &= ml^2\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{a\omega^2}{l}\cos\theta\cos\omega t + \frac{g}{l}\cos\theta\right) + \quad \text{totale Zeitableitung} \end{aligned}$$

Bewegungsgleichung ($Q = l\theta$)

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - ma\omega^2 \sin\theta\cos\omega t$$

$$\longrightarrow \qquad k_1(\theta) = -ma\omega^2 \sin\theta, \qquad k_2(\theta) = 0$$

effektives Potenzial

$$\begin{aligned}
U_{\text{eff}}(\theta) &= -mgl\cos\theta + \frac{m^2a^2\omega^4}{4m\omega^2}\sin^2\theta = U_{\text{eff}}(-\theta) \\
&= mgl\left(-\cos\theta + \frac{r}{2}\sin^2\theta\right) \qquad \text{mit} \;\; r = \frac{a^2\omega^2}{2gl} \\
U'_{\text{eff}}(\theta) &= mgl\sin\theta\,(1 + r\cos\theta) \\
U''_{\text{eff}}(\theta) &= mgl\left[\cos\theta + r\,(2\cos^2\theta - 1)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllll}
\text{Extrema:} & \sin\theta = 0 & \longrightarrow & \theta = 0, \pi \\
& \cos\theta = -1/r & & (\text{nur für } r \geq 1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\theta = 0: & U''_{\text{eff}} = mgl\,(1 + r) > 0 & & \text{immer Minimum} \\
\theta = \pi: & U''_{\text{eff}} = mgl\,(-1 + r) & \begin{array}{l} > 0 \quad \text{für} \;\; r > 1 \\ < 0 \quad \text{für} \;\; r < 1 \end{array} & \begin{array}{r} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array} \\
\cos\theta = -1/r: & U''_{\text{eff}} = \dfrac{mgl}{r}(1 - r^2) < 0 \quad \text{für } r > 1 & & \text{Maximum}
\end{array}$$

<u>Folgerung:</u> $\theta = \pi$ stabil (d.h. Minimum) für

$$r > 1 \qquad \leftrightarrow \qquad \omega^2 > \frac{2gl}{a^2} = \frac{g}{l}\frac{2l^2}{a^2} \gg \frac{g}{l}$$

Beispiel: $l = 20$ cm, $a = 1$ cm

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} > 32 \; s^{-1}$$

etwa mit 50 Hz Wechselspannung

Übung: Pendel mit horizontal schwingendem Aufhängepunkt

V Starrer Körper

Abkehr von Idealisierung der Massenpunkte: endliche Ausdehnung des Körpers berücksichtigt

Idealisierung des starren Körpers: gegenseitige Abstände der Bestandteile konstant

$$|\vec{r}_a(t) - \vec{r}_b(t)| = d_{ab} \quad \text{zeitunabhängig} \quad \forall a, b = 1, \ldots, N$$

$\longrightarrow$ N-Teilchen-System mit holonom-skleronomen Zwangsbedingungen (autonomes System)

Vor.: äußere Kräfte sollen Abstände d_{ab} nicht verändern können

$\longrightarrow$ Kräfte schwach im Vergleich zu Bindungskräften im starren Körper

Idealisierung aufgehoben in Kontinuumsmechanik

V.1 Kinematik und Eulersche Winkel

analog zur Diskussion der Nichtinertialsysteme

raumfestes KS | körperfestes KS

$$\vec{r}_a(t) = \vec{R}(t) + \vec{b}_a(t), \qquad \vec{b}_a(t) = b_{ai}\vec{e}_i(t)$$

per Def. des starren Körpers: $\dot{b}_{ai} = 0$

$$\longrightarrow \qquad \dot{\vec{r}}_a = \dot{\vec{R}} + \vec{\Omega} \times \vec{b}_a$$

$\dot{\vec{R}}$: Translationsgeschwindigkeit, $\vec{\Omega} \times \vec{b}_a$: Rotationsgeschwindigkeit

$\vec{\Omega}(t) = \Omega_i(t)\vec{e}_i(t)$: (momentane) Winkelgeschwindigkeit

zur Erinnerung:

$\dot{\vec{b}} = \vec{\Omega} \times \vec{b}$ normal auf $\vec{\Omega}$ und $\vec{b}$

$|\dot{\vec{b}}|dt = |\vec{\Omega}|\, b\, |\sin\alpha| dt = b\, |\sin\alpha| d\varphi$

$|\vec{\Omega}|$: Winkelgeschwindigkeit um Achse $\dfrac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|}$

$$\vec{e}_i(t) = \vec{n}_j D_{ji}(t) \qquad \text{mit orthogonaler Matrix } D: \quad DD^T = D^T D = \mathbb{1}$$

Standardparametrisierung der Drehmatrix $D(t)$:

<u>Eulersche Winkel</u>

$$\xrightarrow{\text{Drehung um } \vec{n}_3} \qquad \xrightarrow{\text{Drehung um } \vec{n}_1'}$$

$$\xrightarrow{\text{Drehung um } \vec{n}_3''=\vec{e}_3}$$

$$\vec{e}_i = \vec{n}_j R_1(\varphi)_{jk} R_2(\theta)_{kl} R_3(\psi)_{li}$$

$$\longrightarrow \qquad D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} c_\varphi c_\psi - s_\varphi c_\theta s_\psi & -c_\varphi s_\psi - s_\varphi c_\theta c_\psi & s_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\psi + c_\varphi c_\theta s_\psi & -s_\varphi s_\psi + c_\varphi c_\theta c_\psi & -c_\varphi s_\theta \\ s_\theta s_\psi & s_\theta c_\psi & c_\theta \end{pmatrix}$$

$D^{-1} = D^T \qquad \longrightarrow \qquad$ Zeilen- und Spaltenvektoren orthonormal

<u>Vorgangsweise</u>: verallgemeinerte Koord. $\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$ des starren Körpers eingeführt bestimmen zusammen mit $\vec{R}(t)$ die Lage des starren Körpers vollständig

Menge der eigentlichen Drehungen (d.h. ohne Spiegelungen, daher $\det D = 1$):

Drehgruppe $SO(3)$

spezielle ($\det D = 1$) orthogonale Gruppe in 3 Dim.

$\longrightarrow$ Konfigurationsraum des starren Körpers: $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ (6 Freiheitsgrade)

$$\dot{\vec{e}}_i = \vec{\Omega} \times \vec{e}_i = \vec{n}_j \dot{D}_{ji} = \vec{e}_k \underbrace{D_{jk} \dot{D}_{ji}}_{\omega_{ki}} \qquad \longrightarrow \qquad \Omega_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{lik} \omega_{ki}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi \\
\Omega_2 &= -\dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi \\
\Omega_3 &= \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta
\end{aligned}$$

6 Bewegungsgl. notwendig, um $\vec{R}(t), \vec{\Omega}(t)$ zu bestimmen

Bem.: D unabhängig von Wahl von O_B, daher auch $\vec{\Omega}(t)$:

momentane Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers

V.2 Eulersche Kreiselgleichungen

kinetische Energie durch $\vec{R}, \vec{\Omega}$ ausdrücken

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} m_a \dot{\vec{r}}_a^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_a m_a \left(\dot{\vec{R}} + \vec{\Omega}\times\vec{b}_a\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_a m_a \dot{\vec{R}}^2 + \sum_a m_a \dot{\vec{R}}\cdot\left(\vec{\Omega}\times\vec{b}_a\right) + \frac{1}{2}\sum_a m_a\left(\vec{\Omega}\times\vec{b}_a\right)^2 \\
&= \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \left(\dot{\vec{R}}\times\vec{\Omega}\right)\cdot\underbrace{\sum_a m_a\vec{b}_a}_{M\vec{R}_S} + \frac{1}{2}\sum_a m_a\left[\vec{\Omega}^2\vec{b}_a^2 - \left(\vec{\Omega}\cdot\vec{b}_a\right)^2\right]
\end{aligned}$$

2. Term verschwindet, wenn (wie im weiteren angenommen)

entweder	i. O_B Schwerpunkt	$\longrightarrow$	$\vec{R}_S = 0$	(bis auf Weiteres)
oder	ii. O_B festgehalten	$\longrightarrow$	$\dot{\vec{R}} = 0$	(Abschnitt V.3)

Rotationsanteil der kinetischen Energie:

$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\Omega_i I_{ij}\Omega_j$ mit

$$I_{ij} = I_{ji} = \sum_a m_a\left(\delta_{ij}\vec{b}_a^2 - b_{ai}b_{aj}\right)$$

Komponenten des Trägheitstensors I

$T = T_S + T_{\text{rot}}$	kin. Energie
$T_S = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2$	kin. Energie der Schwerpunktsbewegung
$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I_{ij}\Omega_i\Omega_j$	kin. Energie der Rotation

häufiger Fall: Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung

$$M = \textstyle\sum_a m_a \qquad\longrightarrow\qquad M = \int\limits_{V_K} d^3b\,\rho(\vec{b}) \text{ mit Massendichte } \rho(\vec{b})$$

$$\longrightarrow\quad I_{ij} = \int\limits_{V_K} d^3b\,\rho(\vec{b})\left(\delta_{ij}\vec{b}^2 - b_ib_j\right) \qquad V_K\text{: Volumen des starren Körpers}$$

Drehung um feste Achse $\vec{n}$ $\quad (\vec{n}^{\,2}=1):\qquad \vec{\Omega}=\Omega\,\vec{n}$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\Omega^2 I_{ij} n_i n_j = \frac{1}{2} I_n \Omega^2$$

$I_n = I_{ij} n_i n_j$: Trägheitsmoment des Körpers bezüglich $\vec{n}$

Analogie zur kin. Energie des Punktteilchens

$$\begin{array}{ccc} T = \frac{1}{2}mv^2 & \longleftrightarrow & T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_n \Omega^2 \\ m & \longleftrightarrow & I_n \\ v & \longleftrightarrow & \Omega \end{array}$$

I_{ij}: wegen $I_{ij} = I_{ji}$ zunächst 6 unabhängige Komponenten,
die natürlich von Wahl der $\vec{e}_i$ abhängen

Lineare Algebra: Hauptachsentransformation (für relle, symm. Tensoren)

$\exists$ 3 orthonormale Vektoren $\vec{e}_i$, sodass I_{ij} diagonal in dieser Basis

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_i$: Hauptträgheitsachsen

I_i: Hauptträgheitsmomente

$$I_i = \int_{V_K} d^3b\, \rho(\vec{b}) \left(\vec{b}^{\,2} - b_i b_i\right) \geq 0; \qquad I_i = 0 \quad \text{nur für unendlich dünnen Faden}$$

praktische Durchführung: Diagonalisierung (Eigenwertproblem)

gehen zunächst von bel. Basis $\{\vec{e}_i^{\,\prime}\}$ aus, in der Tensor I nicht diagonal ist:

$I = I_{ij} \vec{e}_i^{\,\prime} \otimes \vec{e}_j^{\,\prime}$ in Tensornotation

neue Basis $\{\vec{e}_i\}$ mit $\{\vec{e}_i^{\,\prime}\}$ über orthogonale Transformation O verbunden

$$I = I_{ij} \vec{e}_i^{\,\prime} \otimes \vec{e}_j^{\,\prime} = I_{ij} O_{ik} \vec{e}_k \otimes O_{jl} \vec{e}_l = I_{kl}^{(d)} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l$$

mit Diagonalmatrix $I_{kl}^{(d)}$ (Diagonalelemente I_i):

$$I_{kl}^{(d)} = O_{ik} O_{jl} I_{ij} = \left(O^T I O\right)_{kl} \qquad \longrightarrow \qquad I_{ij} O_{jk} = O_{ij} I_{jk}^{(d)} = I_k O_{ik} \qquad (\text{ohne } \sum_{\text{k}})$$

$$\longrightarrow \qquad (I_{ij} - I_k \delta_{ij})\, O_{jk} = 0$$

für festes k: homogenes Gleichungssystem für O_{jk} $\quad (j = 1, 2, 3)$

$\exists$ nur dann nichttriviale Lösung, wenn

$$\det\left(I_{ij} - I_k \delta_{ij}\right) = 0$$

algebraische Gleichung 3. Grades in I_k; da I positiv definit

$\longrightarrow \quad \exists$ 3 reelle, pos. def. Lösungen I_k

Hauptträgheitsmomente I_k: Eigenwerte des Tensors I

O_{jk} immer als 3 reelle orthonormierte Vektoren für $k = 1, 2, 3$ wählbar

$\longrightarrow$ Eigenwerte I_k und diagonalisierende Matrix O bestimmt

Hauptträgheitsachsen oft aus Symmetrie des starren Körpers ersichtlich:

wenn Körper invariant bez. Drehungen um Achse $\vec{n}$ mit Winkel $0 < \alpha < 2\pi$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$ $\vec{n}$ Hauptträgheitsachse und die beiden anderen Hauptträgheitsachsen sind $\perp \ \vec{n}$

außerdem: wenn $\alpha \neq \pi \quad \longrightarrow \quad I_1 = I_2 \quad (\text{für } \vec{n} = \vec{e}_3)$

im Hauptachsensystem:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_1\Omega_3^2\right)$$

$\longrightarrow$ alle $\vec{\Omega}$ mit gleichem T_{rot} liegen auf dem so genannten

$$\underline{\text{Trägheitsellipsoid}}: \ \{x_i | \sum_{i=1}^{3} I_i x_i^2 = 1\}$$

fest mit Körper verbunden, Hauptachsen des Ellipsoids in Richtung $\vec{e}_i$ mit Längen $1/\sqrt{I_i}$

wenn T_{rot} konstant ($\leftarrow$ keine äußeren Kräfte, $\dot{\vec{R}} = \text{konstant}$), bleibt $\vec{\Omega}/\sqrt{2T_{\text{rot}}}$ stets auf diesem Ellipsoid

Berechnung des Trägheitstensors

oft einfacher, statt Schwerpunkt O_B anderen Ursprung O'_B zu wählen

$$
\begin{aligned}
\vec{b}_a &= \vec{d} + \vec{b}'_a \\
I'_{ij} &= \textstyle\sum_a m_a \left(\delta_{ij}\vec{b}_a'^2 - b'_{ai}b'_{aj}\right) \\
&= \textstyle\sum_a m_a \left[\delta_{ij}(\vec{b}_a - \vec{d})^2 - (b_{ai} - d_i)(b_{aj} - d_j)\right] \\
&= I_{ij} + M\left(\delta_{ij}\vec{d}^2 - d_i d_j\right) - 2\delta_{ij}\vec{d}\cdot\textstyle\sum_a m_a\vec{b}_a \\
&\quad + d_i \textstyle\sum_a m_a b_{aj} + d_j \textstyle\sum_a m_a b_{ai}
\end{aligned}
$$

da O_B Schwerpunkt $\longrightarrow$ $\sum_a m_a \vec{b}_a = 0$

$\boxed{\text{Satz von Steiner}}$

$$\boxed{I'_{ij} = I_{ij} + M\left(\delta_{ij}\vec{d}^2 - d_i d_j\right)}$$

Trägheitsmoment bezüglich Drehachse $\vec{n}$:

$$\begin{aligned} I'_n &= I'_{ij} n_i n_j = I_{ij} n_i n_j + M \left(\delta_{ij} \vec{d}^2 - d_i d_j \right) n_i n_j \\ &= I_n + M \left[\vec{d}^2 - (\vec{d} \cdot \vec{n})^2 \right] = I_n + M \left(\vec{d} \times \vec{n} \right)^2 \geq I_n \end{aligned}$$

Folgerung: bei vorgeg. Richtung der Drehachse $\vec{n}$ ist Trägheitsmoment minimal, wenn Drehachse durch den Schwerpunkt geht

statische Unwucht: $\vec{n}$ nicht durch den Schwerpunkt

Hauptträgheitsmomente eines homogenen Kreiskegels

Masse $\quad M = \rho \pi R^2 H / 3$

Schwerpunkt $\quad \vec{R}_S = \dfrac{1}{M} \sum_a m_a \vec{b}'_a = \dfrac{1}{M} \int d^3 b' \, \rho \, \vec{b}'$

$$M R_{S3} = \rho \int_0^H dz \, z \int_0^{Rz/H} dr \, r \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi\rho \int_0^H dz \, z \frac{R^2 z^2}{2H^2} = \frac{\pi}{4} \rho R^2 H^2$$

$$\longrightarrow \quad R_{S3} = 3H/4$$

$I'_i = \int d^3 b' \, \rho(\vec{b}') \left(\vec{b}'^2 - b_i'^2 \right)$: $\qquad \rho =$ konstant für homogenen Körper

$$I'_3 = \rho \int_0^H dz \int_0^{Rz/H} dr \, r \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 = 2\pi\rho \int_0^H dz \left(\frac{R}{H} \right)^4 \frac{z^4}{4} = \frac{\pi}{10} \rho R^4 H$$

$$\longrightarrow \qquad I'_3 = \frac{3}{10} M R^2 \qquad \longrightarrow \qquad I_3 = I'_3 \quad \text{da} \quad \vec{d} = -\frac{3H}{4} \vec{e}_3 \parallel \vec{n}$$

$$\begin{aligned} I'_1 &= I'_2 = \rho \int_0^H dz \int_0^{Rz/H} dr \, r \int_0^{2\pi} d\varphi (z^2 + \underbrace{r^2 \sin^2 \varphi}_{y^2}) \\ &= 2\pi\rho \int_0^H dz \int_0^{Rz/H} dr \, r \left(z^2 + \frac{r^2}{2} \right) \\ &= \frac{3}{20} M R^2 + 2\pi\rho \int_0^H dz \frac{R^2}{2H^2} z^4 = \frac{3}{20} M R^2 + \frac{\pi}{5} \rho R^2 H^3 = \frac{3}{20} M R^2 + \frac{3}{5} M H^2 \end{aligned}$$

mit $\left(\vec{d} \times \vec{n} \right)^2 = \vec{d}^2 = \left(\dfrac{3H}{4} \right)^2 \qquad \longrightarrow$

$$I_1 = I_2 = I'_1 - M \frac{9H^2}{16} = \frac{3M}{20} \left(R^2 + \frac{H^2}{4} \right)$$

für $H = 2R$: $\quad I_1 = I_2 = I_3 \qquad \longrightarrow \qquad$ Trägheitsellipsoid $=$ Kugel

Drehimpuls

bezogen auf Schwerpunkt O_B des körperfesten Systems

$$\vec{L} = \vec{L}_S + \vec{L}_{\text{rel}} = \vec{L}_{\text{rel}} \qquad \text{da} \qquad \vec{L}_S = \underbrace{\vec{R}_s}_{0} \times \vec{P}$$

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_a m_a \vec{b}_a \times \dot{\vec{b}}_a = \sum_a m_a \vec{b} \times (\vec{\Omega} \times \vec{b}_a) = \sum_a m_a \left[\vec{b}_a^{\,2} \vec{\Omega} - \vec{b}_a (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}_a) \right] \\
&= \vec{e}_i \sum_a m_a \left[\vec{b}_a^{\,2} \Omega_i - \vec{b}_{ai} (\vec{\Omega} \cdot \vec{b}_a) \right] = \vec{e}_i I_{ij} \Omega_j = L_i \vec{e}_i
\end{aligned}$$

Analogie:

Impuls des Punktteilchens	Drehimpuls des starren Körpers
$p_i = m v_i$	$L_i = I_{ij} \Omega_j$

bezogen auf Hauptträgheitsachsen $\qquad (I_{ij} = I_i \delta_{ij})$

$$L_i = I_i \Omega_i \qquad\qquad (\text{ohne } \sum_i)$$

Folgerung: $\vec{L}$ und $\vec{\Omega}$ sind genau dann parallel, wenn $\vec{\Omega} \parallel$ Hauptträgheitsachse

Veranschaulichung mit Trägheitsellipsoid:

$$F(\Omega) = \sum_{i=1}^{3} I_i \Omega_i^2 - 2T_{\text{rot}} = 0$$

$$\vec{L} = \frac{1}{2} \vec{\nabla}_\Omega F(\Omega) \leftrightarrow L_i = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \Omega_i}$$

N-Teilchen-System als starrer Körper

innere Kräfte fallen heraus, da als Zwangskräfte in Richtung der Verbindungslinie je zweier Teilchen:

$$\vec{K}_{ab} = -\vec{K}_{ba} \sim \vec{r}_a - \vec{r}_b$$

bezogen auf $O_B =$ Schwerpunkt: $\quad \vec{R}$ Schwerpunktsvektor im raumfesten KS

Bewegungsgl. für Schwerpunkt	Drehbewegung bez. Schwerpunkt
$\dot{\vec{P}} = \vec{K}^{\text{ext}} = \sum_{a=1}^{N} \vec{K}_a^{\text{ext}} = M \ddot{\vec{R}}$	$\dot{\vec{L}} = \vec{N}^{\text{ext}} = \sum_{a=1}^{N} \vec{b}_a \times \vec{K}_a^{\text{ext}}$

Gleichungen für Drehbewegung müssen Gleichungen für Eulerwinkel sein

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{e}_i(t) I_{ij} \Omega_j(t), \qquad \vec{N}^{\text{ext}} = N_i^{\text{ext}}(t) \vec{e}_i(t) \\
\dot{\vec{L}} &= \vec{\Omega} \times \vec{e}_i \, I_{ij} \Omega_j + \vec{e}_i I_{ij} \dot{\Omega}_j = N_i^{\text{ext}} \vec{e}_i \qquad | \cdot \vec{e}_k \\
\longrightarrow \quad N_k^{\text{ext}} &= I_{kj} \dot{\Omega}_j + I_{ij} \Omega_j (\vec{\Omega} \times \vec{e}_i) \cdot \vec{e}_k = I_{kj} \dot{\Omega}_j + \varepsilon_{kli} I_{ij} \Omega_j \Omega_l
\end{aligned}$$

$$\boxed{N_i^{\text{ext}} = I_{ij}\dot{\Omega}_j + \varepsilon_{ikl}\Omega_k I_{lj}\Omega_j}$$

Eulersche Kreiselgleichungen

explizit (Komponenten im körperfesten KS, bezogen auf Hauptträgheitsachsen):

$$\begin{aligned}
N_1^{\text{ext}} &= I_1\dot{\Omega}_1 + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 \\
N_2^{\text{ext}} &= I_2\dot{\Omega}_2 + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 \\
N_3^{\text{ext}} &= I_3\dot{\Omega}_3 + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2
\end{aligned}$$

3 (nichtlineare !) Diffgl. 2. Ordnung für Eulersche Winkel φ, θ, ψ

Hauptproblem: $\vec{N}^{\text{ext}}$ muss im körperfesten KS zerlegt werden, während $\vec{K}^{\text{ext}}$ meist im raumfesten KS bekannt $\longrightarrow$ i.a. sehr schwierig (in analytischer Form) zu lösen

kräftefreier starrer Körper: $\vec{K}^{\text{ext}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \dot{\vec{P}} = \dot{\vec{L}} = 0$

Eulergleichungen i.a. durch elliptische Funktionen gelöst

Freier symmetrischer Kreisel ($\vec{N}^{\text{ext}} = 0$)

Vereinfachung durch Symmetrie: $I_1 = I_2$ ($\vec{e}_3$ Figurenachse)

$\longrightarrow \quad \dot{\Omega}_3 = 0 \longrightarrow \Omega_3 = \text{konstant}$

$\dot{\Omega}_1 + A\Omega_2 = 0$

$\dot{\Omega}_2 - A\Omega_1 = 0$

mit $A = \dfrac{I_3 - I_1}{I_1}\Omega_3 = \text{konstant}$

$\longrightarrow \quad \dfrac{d}{dt}\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right) = 2\left(\Omega_1\dot{\Omega}_1 + \Omega_2\dot{\Omega}_2\right) = 0$

$\longrightarrow \quad \dfrac{d}{dt}\vec{\Omega}^{\,2} = 0 \quad \longrightarrow \quad |\vec{\Omega}| = B = \text{konstant}$

$\Omega_1 = B\cos At\,, \qquad \Omega_2 = B\sin At$

Folgerung: $\vec{\Omega}$ rotiert gleichmäßig mit Winkelgeschwindigkeit $\dfrac{I_3 - I_1}{I_1}\Omega_3$ auf einem festen Kegel (Gangpolkegel) um die Figurenachse $\vec{e}_3$

Erde: $\sim$ abgeplattetes Ellipsoid mit $I_3 > I_1 = I_2$

$$A = \Omega_3\frac{I_3 - I_1}{I_1} \simeq \Omega_3\frac{1}{300} = \frac{2\pi}{1\ \text{Tag}}\frac{1}{300}$$

$\longrightarrow$ Umlaufperiode von $\vec{\Omega}$ um $\vec{e}_3$ (Nord-Süd-Richtung) von 300 Tagen zu erwarten (Euler, 1765); tatsächlich ca. 427 Tage

Grund: Erde kein starrer Körper, sondern flüssig im Inneren

$$
\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_{i=1}^{3} I_i \Omega_i \vec{e}_i = I_1 \left(\Omega_1 \vec{e}_1 + \Omega_2 \vec{e}_2 \right) + I_3 \Omega_3 \vec{e}_3 \\
&= I_1 \left(\vec{\Omega} - \Omega_3 \vec{e}_3 \right) + I_3 \Omega_3 \vec{e}_3 = I_1 \vec{\Omega} + (I_3 - I_1) \Omega_3 \vec{e}_3
\end{aligned}
$$

daher:

i. $\vec{L}, \vec{\Omega}, \vec{e}_3$ liegen stets in einer Ebene

ii. $\vec{\Omega} = \vec{L}/I_1 + \dfrac{I_1 - I_3}{I_1} \Omega_3 \vec{e}_3 = \vec{L}/I_1 - A\vec{e}_3$

tatsächlich liegt $\vec{L}$ im Raum fest wegen $\dot{\vec{L}} = 0$

$$\vec{L} \cdot \vec{\Omega} = I_1 \left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \right) + I_3 \Omega_3^2 = \text{ konstant}$$

$\longrightarrow$ $\vec{\Omega}$ (und damit $\vec{e}_3$) bewegen sich auf Kegel um $\vec{L}$

$\longrightarrow$ reguläre Präzession um $\vec{L} \parallel \vec{n}_3$

$$\dot{\vec{\Omega}} = \frac{\dot{\vec{L}}}{I_1} - A\dot{\vec{e}}_3 = -A\vec{\Omega} \times \vec{e}_3$$

$$= \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} - \frac{\vec{L}}{I_1} \right) = -\frac{L}{I_1} \vec{\Omega} \times \frac{\vec{L}}{L}$$

mit $L = |\vec{L}|$

$\longrightarrow$ $\vec{\Omega}$ (und damit $\vec{e}_3$) mit konstanter Präzessionsgeschwindigkeit $\omega_P = \dfrac{|\vec{L}|}{I_1}$ um $\vec{L}$

$$\left(\text{analog } \dot{\vec{b}} = \vec{\Omega} \times \vec{b} = |\vec{\Omega}| \frac{\vec{\Omega}}{|\vec{\Omega}|} \times \vec{b}\right)$$

Weitere Anwendungen

a. Starrer Körper rotiert um vorgeg. Achse $\vec{n}$ mit konstantem $|\vec{\Omega}|$

Schwerpunkt i.a. beschleunigt $\longrightarrow$ $\dot{\vec{P}} = \vec{Z}$

Zwangskraft $\vec{Z}$ auf Lager der Drehachse: statische Unwucht

(verschwindet, wenn $\vec{n}$ durch Schwerpunkt geht)

da $\vec{\Omega}$ = konstant

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \left(\vec{e}_i \, I_{ij} \Omega_j \right) = \dot{\vec{e}}_i \, I_{ij} \Omega_j = I_{ij} \Omega_j \, \vec{\Omega} \times \vec{e}_i = \vec{\Omega} \times \vec{L} = \vec{N}_Z$$

Zwangsdrehmoment auf Lager, um Drehachse beizubehalten: dynamische Unwucht

verschwindet für $\vec{\Omega} \parallel \vec{L}$, d.h. Drehung um Hauptträgheitsachse
(Wuchten von Autorädern, Maschinen, ...)

b. Physikalisches Pendel

Drehachse $\vec{n} \perp$ Ebene, $\qquad \vec{K}_a^{\text{ext}} = m_a \vec{g}$

Drehimpuls bezogen auf Drehpunkt O'_B

$\dot{\vec{L}} = \vec{N}^{\text{ext}} = \sum_a \vec{b}'_a \times \vec{K}_a^{\text{ext}}$

$= \sum_a m_a \vec{b}'_a \times \vec{g} = M \vec{R}_S \times \vec{g} \ \perp$ Ebene

Komponente $\perp$ Ebene:

$$L_\perp = I' \dot{\theta} = (I_S + Ml^2)\dot{\theta} \qquad (|\vec{d}| = l = |\vec{R}_S|)$$

mit Satz von Steiner und $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$

$$\longrightarrow \qquad \dot{L}_\perp = (I_S + Ml^2)\ddot{\theta} = -Mlg \sin\theta \qquad \text{(macht } \dot{\theta} \text{ kleiner)}$$

Bewegungsgl.:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \frac{1}{1 + \frac{I_S}{Ml^2}} \sin\theta = 0$$

kleine Schwingungen: $\sin\theta \sim \theta \qquad \longrightarrow \qquad$ Pendelfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{I_S}{Ml^2}}}$

Änderung gegenüber math. Pendel $\longrightarrow$ erlaubt Bestimmung von I_S

Beispiel: Ring

$$I_S = Mr^2, \ l = r \qquad \longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{2r}}$$

Frequenz wie math. Pendel der Länge $2r$ (Durchmesser)

V.3 Schwerer symmetrischer Kreisel

Spitze O'_B festgehalten (nicht Schwerpunkt)

Ziel: Beschreibung im raumfesten KS $\longrightarrow$
$\varphi(t), \theta(t), \psi(t)$ bestimmen, um Lage im Raum festzulegen

Lagrange-Formalismus zweckmäßig

$$L = T - U = \frac{M}{2} \underbrace{\dot{\vec{R}}^2}_{=0} + \frac{1}{2} I'_{ij} \Omega_i \Omega_j - U(\vec{R}, \varphi, \theta, \psi)$$

$$= \frac{I_1'}{2}\left(\dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi\right)^2 + \frac{I_2'}{2}\left(-\dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi\right)^2 + \frac{I_3'}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 - U(\vec R, \varphi, \theta, \psi)$$

I_i' Hauptträgheitsmomente bez. O_B'

symmetrischer Kreisel (bez. $\vec e_3$):

$$I_1' = I_2'$$

Schwerkraft ($l = |\vec R_S|$):

$U = -\sum_a m_a \vec b_a' \cdot \vec g$

$= -M\vec R_S \cdot \vec g = Mgl\cos\theta$

$$L = \frac{I_1'}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + \frac{I_3'}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 - Mgl\cos\theta$$

Folgerung: φ und ψ sind zyklische Koord.

$$\longrightarrow \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = I_1'\sin^2\theta\dot\varphi + I_3'\cos\theta(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = \quad \text{konstant}$$

Beh.: $p_\varphi = \vec L \cdot \vec n_3$ Projektion von $\vec L$ auf $\vec n_3$

Bew.: $\vec L = \sum_i I_i'\Omega_i\vec e_i$, $\quad \vec e_i = \vec n_j D_{ji} \quad \longrightarrow \quad \vec e_i \cdot \vec n_3 = D_{3i}$

$$\begin{aligned}\vec L \cdot \vec n_3 &= \sum_i I_i'\Omega_i D_{3i} \\ &= I_1'\left\{\sin\theta\sin\psi(\dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi) + \sin\theta\cos\psi(-\dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi)\right\} \\ &\quad + I_3'\cos\theta(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = p_\varphi \qquad \text{qed}\end{aligned}$$

2. Erhaltungsgröße:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = I_3'(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta) = \vec L \cdot \vec e_3 = I_3'\Omega_3 = \quad \text{konstant}$$

$\longrightarrow$ offensichtliche Symmetrien des Problems:

p_φ auf jeden Fall

p_ψ wegen $I_1' = I_2'$

$$\longrightarrow \qquad p_\varphi = I_1'\sin^2\theta\dot\varphi + p_\psi\cos\theta$$

$$\longrightarrow \qquad \dot\varphi = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta}\ , \qquad \dot\psi = \frac{p_\psi}{I_3'} - \dot\varphi\cos\theta$$

daher: sobald $\theta(t)$ bestimmt $\longrightarrow$ $\varphi(t), \psi(t)$ durch einfache Integrationen

Energieerhaltung (wegen $\dfrac{\partial L}{\partial t} = 0$)

$$\begin{aligned} E &= T + U = \frac{I_1'}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3'}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 + Mgl\cos\theta \\ &= \frac{I_1'}{2}\dot\theta^2 + \underbrace{\frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1'\sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3'} + Mgl\cos\theta}_{U_{\text{eff}}(\theta)} \end{aligned}$$

zurückgeführt auf 1-dim. Problem in θ

$\longrightarrow$ <u>schwerer symmetrischer Kreisel vollständig integrabel</u>

i. <u>$E = E_1 = E_{\min}: \quad \theta = \theta_0 = \text{konstant}$</u>

$\longrightarrow \quad \dot\varphi = \dfrac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta_0}{I_1'\sin^2\theta_0}$

$\varphi(t) = \varphi(0) + \dfrac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta_0}{I_1'\sin^2\theta_0}\, t$

ebenso: $\psi(t) = \psi(0) + \dot\psi\, t$

Zeichnung für $|p_\varphi| \neq |p_\psi|$

<u>reguläre Präzession:</u> $\vec e_3$ (und damit $\vec L, \vec\Omega$) läuft gleichmäßig auf Kegel mit Winkel θ_0 und Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi$ um $\vec n_3$, außerdem rotiert Kreisel mit Winkelgeschwindigkeit $\dot\psi$ um $\vec e_3$

mit $L_i = I_i'\Omega_i$: $\quad E = \dfrac{L_1^2 + L_2^2}{2I_1'} + \dfrac{L_3^2}{2I_3'} + U(\theta_0)$

da $L_3 = \vec L \cdot \vec e_3 = p_\psi = \text{konstant} \quad \longrightarrow \quad |\vec L| = \text{konstant}$

mit $\dot\theta = 0$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta_0\sin\psi = \dot\varphi D_{31} = \dot\varphi\vec n_3\cdot\vec e_1 \\ \Omega_2 &= -\dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi = \dot\varphi D_{32} = \dot\varphi\vec n_3\cdot\vec e_2 \\ \longrightarrow \quad \vec\Omega &= \Omega_i\vec e_i = \Omega_3\vec e_3 + \dot\varphi\left(\vec n_3\cdot\vec e_1\,\vec e_1 + \vec n_3\cdot\vec e_2\,\vec e_2\right) \\ &= \dot\varphi\vec n_3 + \vec e_3\left(\Omega_3 - \dot\varphi\vec n_3\cdot\vec e_3\right) = \dot\varphi\vec n_3 + \dot\psi\vec e_3 \end{aligned}$$

Folgerung: $\vec\Omega$ liegt in $(\vec n_3, \vec e_3)$ Ebene

ebenso (analog wie für freien Kreisel mit $I_i \to I_i'$)

$$\vec L = \textstyle\sum_i I_i'\Omega_i\vec e_i = I_3'\Omega_3\vec e_3 + I_1'\left(\vec\Omega - \Omega_3\vec e_3\right)$$

$\longrightarrow \quad \vec e_3, \vec n_3, \vec\Omega, \vec L$ liegen in einer Ebene

Grund für Präzession (für „schnellen“ Kreisel):

schneller Kreisel: $E_{\text{rot}} \gg |E_{\text{pot}}| \qquad \longrightarrow$

Minimum von $U_{\text{eff}}(\theta)$ für $\qquad \dot{\varphi} \sim p_\varphi - p_\psi \cos\theta_0 \simeq 0$

da $\Omega_1, \Omega_2 \sim \dot{\varphi}$

$$\longrightarrow \qquad \vec{L} = I_3' \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta_0\right) \vec{e}_3 + O(I_1'\dot{\varphi}) \simeq I_3'\dot{\psi}\,\vec{e}_3$$

$\longrightarrow$ Rotation um Figurenachse ergibt Hauptbeitrag zur Energie

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}^{\text{ext}} = \vec{R}_S \times M\vec{g} = Ml\vec{e}_3 \times \vec{g} \simeq \frac{\vec{L}}{L} \times Ml\vec{g} = \vec{\Omega}_P \times \vec{L} \qquad (l = |\vec{R}_S|)$$

Präzessionswinkelgeschwindigkeit $\quad |\vec{\Omega}_P| = \dfrac{Mgl}{L}$

Drehmoment senkrecht auf $\vec{L}$ und $\vec{g}$ $\qquad \longrightarrow \quad \vec{L}$ weicht durch Drehbewegung aus

ii. $\underline{E = E_2 > E_{\min} : \quad \theta_1 \leq \theta(t) \leq \theta_2}$

qualitative Diskussion (in Oszillatornäherung leicht verifizierbar → Übung)

a. Präzessionsbewegung von $\vec{L}$ um $\vec{n}_3$ mit $\dot{\varphi} \sim \Omega_P$

b. Nutation der Figurenachse $\vec{e}_3$ um $\vec{L}$ mit zeitabhängigem $\theta(t)$

c. Drehbewegung des Kreisels um $\vec{e}_3$ mit $\psi(t)$

Bewegung der Figurenachse $\vec{e}_3$ um $\vec{n}_3$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos\theta}{I_1' \sin^2\theta}$$

gleiches Vorzeichen $\qquad\qquad$ wechselt Vorzeichen

für $\theta_1 \leq \theta(t) \leq \theta_2$

Erde als Kreisel

bereits diskutiert: Drehung von $\vec{\Omega}$ um $\vec{e}_3$

Präzession: Gezeitenkräfte von Sonne und Mond üben Drehmoment aus

$\longrightarrow$ Erdachse präzediert um $\vec{n}_3$ mit Öffnungswinkel $\theta_0 = 23.5°$ (Schiefe der Ekliptik), mit einer Periode von ca. 26000 Jahren (Hipparchos von Nicea, 190 v. Chr.)

$\longrightarrow$ Polarstern nach einiger Zeit nicht mehr im Norden

$\longrightarrow$ Kalendermonate (speziell der Frühlingspunkt) und Sternzeichen bewegen sich relativ zueinander; tatsächlich seit der Antike Verschiebung um etwa ein Sternzeichen, da seither ca. 26000:12 $\simeq$ 2200 Jahre vergangen sind $\longrightarrow$ Problem für Astrologie!

VI Hamiltonsche Formulierung der Mechanik

erlaubt tiefere Einsicht in die Struktur der klassischen Mechanik (Phasenraum, kanonische Transformationen, symplektische Struktur, dynamische Systeme, ...), Vorbereitung für QM (Poissonklammer $\longrightarrow$ Kommutator)

VI.1 Legendre-Transformation und Hamiltonfunktion

Lagrangefunktion $\quad L(q^i, \dot{q}^i, t) \qquad i = 1, \ldots, f$

Bewegungsgleichungen $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \dfrac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \qquad \longrightarrow$

f Diffgl. 2. Ordnung: $\quad F_j(\ddot{q}^i, \dot{q}^i, q^i, t) = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, f)$

können immer auf $2f$ Diffgl. 1. Ordnung zurückgeführt werden, indem verallgemeinerte Geschwindigkeiten $v^i = \dot{q}^i$ als unabhängige dynamische Variable eingeführt werden:

$$\begin{aligned} F_j(\dot{v}^i, v^i, \dot{q}^i, q^i, t) &= 0 \\ \dot{q}^j - v^j &= 0 \qquad\qquad (i, j = 1, \ldots, f) \end{aligned}$$

vorteilhaft: statt v^i besser verallgemeinerte Impulse $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ als unabhängige dynamische Variable verwenden

Vermutung: in der Lagrangefunktion $\dot{q}^i$ einfach durch p_i ersetzen und dann

$$L(q^i, \dot{q}^i(q^j, p_j, t), t) = \widehat{L}(q^i, p_i, t)$$

für Ableitung der Bewegungsgl. verwenden $\qquad \longrightarrow \qquad$ funktioniert nicht !

Gegenbeispiel:

$$\begin{array}{cc} x & \dot{q} \\ y(x) = (x - x_0)^2 & L(\dot{q}) \\ u = \dfrac{dy}{dx} = 2(x - x_0) & p = \dfrac{dL}{d\dot{q}} \end{array}$$

Einsetzen ergibt $\quad y(x(u)) = \dfrac{u^2}{4} \qquad \longrightarrow$

charakterisiert die Funktion y sicher nicht eindeutig, da für alle x_0 dasselbe Ergebnis

Idee: Kurve als Einhüllende ihrer Tangenten charakterisieren

Tangente ist fixiert durch Anstieg und Schnittpunkt mit y-Achse

Vor.: $y(x)$ 2-mal stetig diff., $\dfrac{d^2y}{dx^2} \neq 0$
$\longrightarrow$ Satz über implizite Funktionen:
mit $u = \dfrac{dy}{dx}$ $\exists$ (zumindest lokal)
die Umkehrfunktion $x = x(u)$

aus der Zeichnung $\longrightarrow$ $\tan\alpha = \dfrac{y-Y}{x} = u$

Def.: $Y(u) = y(x(u)) - ux(u)$ heißt die

Legendre-Transformierte der Funktion $y(x)$

Beispiel:

$$y(x) = (x-x_0)^2, \quad u = \frac{dy}{dx} = 2(x-x_0) \quad \longrightarrow \quad x = \frac{u}{2} + x_0$$

$$\longrightarrow \quad Y(u) = \frac{u^2}{4} - u\left(\frac{u}{2} + x_0\right) = -\frac{u^2}{4} - x_0 u$$

$\longrightarrow$ $Y(u)$ hängt zum Unterschied von vorhin explizit von x_0 ab $\longrightarrow$ zumindest notwendige Bedingung für eindeutige Charakterisierung der ursprünglichen Funktion erfüllt

Ableitung der Legendre-Transformierten:

$$\frac{dY}{du} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} - x - u\frac{dx}{du} = -x(u)$$

daher: $\exists \ \dfrac{d^2Y}{du^2} = -\dfrac{dx}{du}$ wegen $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2} \neq 0 \longrightarrow$

kann Legendre-Transformierte von $Y(u)$ bilden mit $u = u(x)$

$$Z(x) = Y(u(x)) + xu(x) = y(x)$$

$\longrightarrow$ Legendre-Transformation ist involutiv

$y(x)$	$Y(u)$
$u = \dfrac{dy}{dx}$	$x = -\dfrac{dY}{du}$
$Y(u) = y(x(u)) - ux(u)$	$y(x) = Y(u(x)) + xu(x)$
$\dfrac{dY}{du} = -x$	$\dfrac{dy}{dx} = u$

Def.: die Hamiltonfunktion H ist die Legendre-Transformierte von $-L$ bezüglich $\dot{q}^i$; dabei bleiben die Koordinaten q^i selbst unberührt

Vor.: $\det(\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\dot{q}^j}) \neq 0$

$\longrightarrow$ $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ stets (zunächst lokal) auflösbar nach

$$\dot{q}^i = \dot{q}^i(p_j, q^j, t)$$

Punktmechanik: T und daher L positiv definite Funktion der $\dot{q}^i$ $\longrightarrow$

stets global auflösbar $\longrightarrow$

$$H(p_i, q^i, t) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}^i(p_j, q^j, t) - L(q^i, \dot{q}^i(p_j, q^j, t), t)$$

Eigenschaften der Legendre-Transformation $\longrightarrow$

Hamiltonsche Gleichungen $\equiv$ kanonische Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}^i + p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial p_i} = \dot{q}^i \\
\frac{\partial H}{\partial q^i} &= p_j \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = -\dot{p}_i
\end{aligned}$$

kanonisches System
$\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\dot{p}_i \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i$
(fast) symmetrische Behandlung der kanonisch konjugierten Variablen q^i, p_i
$2\,f$ gewöhnliche Diffgl. 1. Ordnung

Umkehrung (Übung): da Legendre-Transformation involutiv, können aus den kanonischen Gleichungen umgekehrt die Euler-Lagrange-Gleichungen abgeleitet werden

Bedeutung (Interpretation) von H ?

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i}_{-\dot{p}_i\dot{q}^i + \dot{q}^i\dot{p}_i = 0} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

daher:

wenn $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, d.h. wenn H nicht explizit von der Zeit abhängt, $\longrightarrow$

$H(p_i(t), q^i(t))$ ist eine Erhaltungsgröße

N Punktteilchen in kartesischen Koordinaten

Lagrangefunktion $\qquad L = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a}{2}\dot{\vec{r}}_a^2 - U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

$$\vec{p}_a = m_a \dot{\vec{r}}_a \qquad \longrightarrow \qquad \dot{\vec{r}}_a = \frac{\vec{p}_a}{m_a}$$

$$\begin{aligned}
H(\vec{p}_a, \vec{r}_a) &= \sum_a \vec{p}_a \cdot \dot{\vec{r}}_a - L = \sum_a \left(\frac{\vec{p}_a^2}{m_a} - \frac{m_a}{2}\frac{\vec{p}_a^2}{m_a^2} \right) + U \\
H(\vec{p}_a, \vec{r}_a) &= \sum_a \frac{\vec{p}_a^2}{2m_a} + U(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = T + U
\end{aligned}$$

Energieerhaltung: $\qquad H(\vec{p}_a(t), \vec{r}_a(t)) = E$

N.B.: $H(p_i(t), q^i(t))$ ist immer eine Erhaltungsgröße, aber nicht unbedingt die Energie

Hauptvorteil des Hamiltonformalismus:

„Gleichberechtigung“ von q^i und p_i

$2f$-dim. Raum (diff. Mannigfaltigkeit) der $q^i, p_i \quad = \quad$ <u>Phasenraum</u>

Existenz- und Eindeutigkeitssatz:
durch jeden Punkt des Phasenraums geht genau eine Lösungskurve der Bewegungsgleichungen

<u>Beispiele</u>

i. <u>Harmonischer Oszillator ($f = 1$)</u>

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 q^2 \qquad \longrightarrow \qquad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

neue Variable: $\quad x = \sqrt{m}\omega q, \quad y = \frac{p}{\sqrt{m}}, \quad \tau = \omega t$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dq}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{y}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}\omega}\frac{dx}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{dx}{d\tau} = y$$

$$\text{Hamiltonfunktion} \quad H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial H}{dy} = y, \qquad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{\partial H}{dx} = -x$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x} - y & = & 0 \\ \dot{y} + x & = & 0 \end{array}\right\} \qquad \dot{z} + iz = 0 \qquad (\text{mit } z = x + iy)$$

Lösung: $\quad z(\tau) = z(0)e^{-i\tau} \qquad \longrightarrow$

$$|z(\tau)|^2 = x^2 + y^2 = |z(0)|^2 = 2E: \quad \text{Kreis mit Radius } \sqrt{2E}$$

Phasenraum des harmonischen Oszillators: $\quad$ Kreise (in x, y)

geschlossene Kurven im Phasenraum

$\leftrightarrow$ vollständig integrables Problem

Ellipsen in q, p

ii. <u>Ebenes Pendel im Schwerefeld</u>

Lagrangefunktion $\qquad L = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} = p_\theta \qquad \longrightarrow \qquad H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos\theta)$$

mit $\tau = \omega t$, wobei $\omega^2 = g/l$:

$$\begin{array}{rcl} \dot{\theta} & = & \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} = \frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \omega\frac{d\theta}{d\tau} \\ \dot{p}_\theta & = & -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta = \omega\frac{dp_\theta}{d\tau} \end{array}$$

Wahl der kanonischen Variablen: $x = \theta, \quad y = \frac{p_\theta}{ml^2\omega}$

skalierte (dimensionslose) Hamiltonfunktion (Erhaltungsgröße!)

$$h(x, y) = \frac{H}{mgl} = \frac{y^2}{2} + 1 - \cos x$$

kanonische Gleichungen: $\frac{dx}{d\tau} = y, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\sin x$

$h \ll 1: \quad h \simeq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

$h = 2:$ Separatrix

$h > 2:$ stets $|y| > 0 \longrightarrow |p_\theta| > 0$

Phasenraum ist ein Zylinder, da $x = \pi$ und $x = -\pi$ zu identifizieren sind

VI.2 Kanonische Transformationen

zyklische Koordinate q^1 : $H(p_1, \ldots, p_f, q^2, \ldots, q^f, t)$

$$\longrightarrow \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q^1} = 0 \quad \longrightarrow \quad p_1 = a_1 = \text{konstant}$$

1. Integral der Bewegung $\longrightarrow$ Problem reduziert auf $f - 1$ Freiheitsgrade

$$H(p_2, \ldots, p_f, q^2, \ldots, q^f, t; a_1) \quad \longrightarrow \quad \text{kanonische Gleichungen}$$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \qquad (i = 2, \ldots, f)$$

enthalten a_1 als konstanten Parameter

nach Lösung des $(f-1)$-dimensionalen Problems:

$$\dot{q}^1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H(p_j(t), q^j(t), t; a_1)}{\partial a_1} \qquad (j = 2, \ldots, f)$$

$\longrightarrow$ durch einfache Integration $q^1(t)$ bestimmbar
$\longrightarrow$ Standardrezept für praktisch alle integrablen (explizit lösbaren) Modelle der Mechanik

Versuch: mit so genannter Punkttransformation $q^i \to Q^i = Q^i(q^j, t)$ möglichst viele Variable Q^i zyklisch zu machen, d.h aus H, bzw. L zu entfernen
$\longrightarrow$ geht i.a. nicht vollständig, da Klasse der Punkttransformationen zu eingeschränkt

Phasenraum: erlaubt Transformationen aller $2f$ Variablen q^i, p_i

wichtige Einschränkung: neue Variable müssen wieder kanonisch sein

$$q^i, p_i \quad \longrightarrow \quad Q^i = Q^i(q^j, p_j, t), \; P_i = P_i(q^j, p_j, t)$$

im Gegensatz zu reinen Punkttransformationen ergibt nicht jede solche Transformation kanonische Gleichungen mit einer transformierten Hamiltonfunktion H'

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q^i}$$

die den ursprünglichen Bewegungsgleichungen äquivalent sind

eleganteste Behandlung mit modernen Mitteln der Differentialgeometrie (äußere Differentialformen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten) $\longrightarrow$ Arnol'd, Thirring (Bd. 1), Scheck

<u>klassische Methode:</u> kanonische Gleichungen auf Variationsproblem zurückgeführt

Funktional $\quad A[q^i, \dot{q}^i, p_i, \dot{p}_i] = \int dt \underbrace{[\sum_j p_j \dot{q}^j - H(p_i, q^i, t)]}_{\overline{L}(q^i, \dot{q}^i, p_i, t)}$

Extremum für unabhängige $q^i, \dot{q}^i, p_i, \dot{p}_i$ gesucht

Funktional extremal für

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial q^i} \quad \longrightarrow \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{p}_i} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial p_i} \quad \longrightarrow \quad 0 = \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$\longrightarrow$ ergibt gerade die kanonischen Gleichungen

um bei Transformationen wieder die kanonischen Gleichungen zu erhalten $\longrightarrow$

$$\boxed{\sum_j p_j \dot{q}^j - H(p_i, q^i, t) = \sum_j P_j \dot{Q}^j - H'(P_i, Q^i, t) + \frac{dF(p_i, q^i, P_i, Q^i, t)}{dt}}$$

$F(p_i, q^i, P_i, Q^i, t)$: <u>Erzeugende (Funktion) der kanonischen Transformation</u>

Bem.: kann stets erreichen, dass F nur von $2f$ Variablen abhängig ist,
wenn $Q^i = Q^i(q^j, p_j, t)$, $P_i = P_i(q^j, p_j, t)$ oder inverse Funktionen benützt

<u>4 Standardformen</u> (durch Legendre-Transformationen verbunden)

A. <u>$F = F_1(q^i, Q^i, t)$</u> $\quad \longrightarrow \quad$ q^i, Q^i als $2f$ unabhängige Variable

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial F_1}{\partial Q^j}\dot{Q}^j$$

da q^i, Q^i unabhängig $\longrightarrow$

$$p_i(q^j, Q^j) = \frac{\partial F_1}{\partial q^i}\ , \qquad P_i(q^j, Q^j) = -\frac{\partial F_1}{\partial Q^i}\ , \qquad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Vor. (für spätere Legendre-Transformation): $\quad \det(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q^i \partial Q^j}) \det(\frac{\partial^2 F_1}{\partial Q^k \partial Q^l}) \neq 0$

$\longrightarrow \quad p_i(q^j, Q^j) = \frac{\partial F_1}{\partial q^i}\ , \quad P_i(q^j, Q^j) = -\frac{\partial F_1}{\partial Q^i} \quad$ nach Q^i auflösbar

Anwendung auf harmonischen Oszillator ($f = 1$)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 \qquad F_1 = \frac{\varepsilon}{2} m\omega q^2 \cot Q \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \varepsilon m\omega q \cot Q \ , \qquad P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{\varepsilon m\omega q^2}{2\sin^2 Q}$$

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P\varepsilon}{m\omega}} \sin Q \ , \qquad p = \varepsilon m\omega \sqrt{\frac{2P\varepsilon}{m\omega}} \cos Q \\ H' &= H = \varepsilon\omega P \cos^2 Q + \frac{m}{2}\omega^2 \frac{2P\varepsilon}{m\omega} \sin^2 Q = \varepsilon\omega P \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \qquad \dot{P} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad P = \varepsilon a = \text{konstant} \ , \qquad a = \varepsilon P = \frac{E}{\omega} > 0$$

$$\longrightarrow \qquad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \varepsilon\omega \qquad \longrightarrow \qquad Q(t) = \varepsilon\omega t + b$$

vollständige Lösung:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\varepsilon\omega t + b) \quad , \quad p(t) = \varepsilon m\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \cos(\varepsilon\omega t + b)$$

B. Legendre-Transformation von F_1 bezüglich Q^i

$$F_2(q^i, P_i, t) = F_1(q^i, Q^i, t) - Q^k \frac{\partial F_1}{\partial Q^k}$$

$$\longrightarrow \qquad F_2(q^i, P_i, t) = F_1(q^i, Q^i(q^k, P_k, t), t) + P_j Q^j(q^i, P_i, t)$$

da Legendre-Transformation bezüglich Q^i $\xrightarrow{\text{aus A.}}$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q^i} \ , \qquad Q^i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \ , \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

Beispiel: $\quad F_2 = f^i(q^j) P_i$

$$\longrightarrow \qquad H' = H \ , \qquad Q^i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f^i(q^j) \ , \qquad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q^i} = \frac{\partial f^j}{\partial q^i} P_j = \frac{\partial Q^j}{\partial q^i} P_j$$

$\longrightarrow$ zeitunabhängige Punkttransformation ist stets eine kanonische Transformation

C. Legendre-Transformation von F_1 bezüglich q^i

$$F_3(p_i, Q^i, t) = F_1(q^i(p_j, Q^j, t), Q^i, t) - q^k \frac{\partial F_1}{\partial q^k} = F_1(q^i(p_j, Q^j, t), Q^i, t) - q^k(p_i, Q^i, t) p_k$$

$$\longrightarrow \qquad q^i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \ , \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q^i} \ , \quad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

D. Legendre-Transformation von F_2 bezüglich q^i

$$F_4(p_i, P_i, t) = F_2 - q^j \frac{\partial F_2}{\partial q^j} = F_1 + P_j Q^j - p_j q^j$$

$$\longrightarrow \qquad q^i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}\ , \quad Q^i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}\ , \quad H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

Nachteil:

$F_1, \ldots, F_4$ lassen noch keine einheitliche Struktur erkennen, die der Gleichberechtigung von p und q entspräche

einheitliche Notation $(f = 1)$: $\quad x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$, $\quad$ also $x_1 = q, \quad x_2 = p$

Def.: $\quad H_{,i} := \dfrac{\partial H}{\partial x_i}$, $\quad$ Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad J^2 = -\mathbb{1},\ J^T = J^{-1} = -J$

kanonische Gleichungen:

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \qquad \leftrightarrow \qquad \dot x_i = J_{ij} H_{,j}$$

kanonische Transformation: $\quad x \quad \longrightarrow \quad y = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$

$$M_{ij} := \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \qquad \longrightarrow \qquad M^{-1}_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad \text{wegen} \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

$$-JM = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial Q} & -\frac{\partial p}{\partial P} \\ \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \end{pmatrix}$$

$$JM^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \\ -\frac{\partial Q}{\partial q} & -\frac{\partial Q}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Vergleich mit den Relationen in A,B,C und D $\quad$ (z.B.: aus B $\longrightarrow \dfrac{\partial p}{\partial P} = \dfrac{\partial Q}{\partial q}$):

$$\longrightarrow \qquad -JM = \left(JM^{-1}\right)^T = M^{-1\ T} J^T = -M^{-1\ T} J$$

und daher erfüllen die Matrizen M von kanonischen Transformationen

$$M^T J M = J \qquad\qquad (\leftrightarrow MJM^T = J)$$

Menge aller solcher Matrizen (hier für $f = 1$) bilden die

symplektische Gruppe $Sp(2f)$ (über $\mathbb{R}$)

da $\det J = 1 \neq 0$: aus $M^T J M = J \quad \longrightarrow \quad (\det M)^2 = 1$

tatsächlich:

$$\det M = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial q}{\partial P}\left(-\frac{\partial P}{\partial q}\right) = \frac{dq(Q,P)}{dq} = 1$$

gilt für beliebige f: $\quad M \in Sp(2f) \quad \longrightarrow \quad \det M = 1$

für bel. f: $\quad J = \begin{pmatrix} 0_f & \mathbb{1}_f \\ -\mathbb{1}_f & 0_f \end{pmatrix}$

Folgerung Phasenraum besitzt eine natürliche symplektische Struktur kanonische Transformationen entsprechen Elementen der symplektischen Gruppe $Sp(2f)$

Liouvillescher Satz

kanonische Gleichungen: $\quad \dot{x}_i = J_{ij} H_{,j} \qquad x = (q^1, \ldots, q^f, p_1, \ldots, p_f)$

Lösung $\equiv$ Fluss im Phasenraum

$x_i = x_i(t=0) \longrightarrow x_i(t) =: y_i$

als kanonische Transformation

interpretiert (zeitabhängig)

Beh.: $\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = 1$

$$\longrightarrow \qquad \int_{t=0} dx_1 \ldots dx_{2f} = \int_t dy_1 \ldots dy_{2f}$$

$\longrightarrow$ Phasenfluss lässt Volumen im Phasenraum ungeändert
(auch Orientierung beibehalten wegen $\det = 1$)

zeitliche Entwicklung eines kanonischen Systems $\equiv$ Fließen einer inkompressiblen Flüssigkeit

Satz von Liouville (in verallgemeinerter Form)

ein allgemeines dynamisches System werde durch folgende Diffgl. beschrieben

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Lösung in der Nähe von $t = 0$:

$$x_i(t) = x_i(0) + f_i(x_j(0))\, t + O(t^2)$$

wenn $\mathrm{div}\vec{f} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \quad \longrightarrow$ Zeitentwicklung lässt Volumen invariant

Beweis:

$$V(t) = \int_{D(t)} d^n x(t) = \int_{D(0)} d^n x(0) \left| \det \left(\frac{\partial x_i(t)}{\partial x_j(0)} \right) \right|$$

$$\frac{\partial x_i(t)}{\partial x_j(0)} = \delta_{ij} + \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, t + O(t^2) = (\mathbb{1} + A\ t)_{ij} + O(t^2)$$

allgemeine Relation für nichtsinguläre Matrizen: $\quad \log\det M = \operatorname{tr}\log M$

$\longrightarrow \qquad \det(\mathbb{1} + A\ t) = e^{\operatorname{tr}\log(\mathbb{1}+At)} = e^{\operatorname{tr}A\,t + O(t^2)} = 1 + \operatorname{tr}A\ t + O(t^2)$

$$\operatorname{tr}A = A_{ii} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \operatorname{div}\vec{f} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{dV(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \int_{D(0)} d^n x(0)\, \operatorname{div}\vec{f} = 0$$

da Anfangspunkt $t = 0$ beliebig $\qquad \longrightarrow \qquad \dfrac{dV(t)}{dt} = 0 \ \ \forall t$ qed

Anwendung auf kanonisches System ($n = 2f$):

$$f_i = J_{ij} H_{,j} \qquad \longrightarrow \qquad \operatorname{div}\vec{f} = J_{ij} H_{,ji} = 0 \qquad \text{da} \ \ H_{,ji} = H_{,ij}\ \text{, aber} \ \ J^T = -J$$

zahlreiche Anwendungen vor allem in der statistischen Physik

Poincarésches Wiederkehrtheorem (Ergodentheorie)

sei g eine volumerhaltende, eindeutige und stetige Abbildung, die ein begrenztes Gebiet D des E^n auf sich selbst abbildet: $gD = D$; dann gibt es in einer bel. Umgebung U eines jeden Punktes in D einen Punkt $x \in U$, der in das Gebiet U zurückkehrt, d.h. $g^m x \in U$ für ein gewisses $m > 0$

Beweis:

$U, gU, g^2U, \ldots g^mU$ haben

alle dasselbe Volumen

D endlich: $\ \exists\, k > 0, l \geq 0, k > l$

mit $\ g^kU \cap g^lU \neq 0 \longrightarrow g^{k-l}U \cap U \neq 0$

(wegen Eindeutigkeit der Abbildung)

daher: $\ \exists\ x \in U$ mit $g^m x \in U \ \ (m = k - l)$ qed

N.B.: keinerlei Aussage über notwendige Zeit
natürlich i.a. umso länger, je kleiner U und je größer die Zahl der Freiheitsgrade

weitere paradoxe Konsequenz des Liouvilleschen Satzes:

Trennwand entfernt $\longrightarrow$

nach „gewisser“ Zeit kehren alle

Moleküle in linke Kammer zurück

aber: schon bei kleinen Gasmengen $T_{\text{Wiederkehr}} \gg T_{\text{Universum}}$

VI.3 Poissonklammer

Zeitentwicklung einer beliebigen Funktion $f(q^i, p_i, t)$ auf dem Phasenraum

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)$$

Def.: Poissonklammer

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q^i}\right)$$

offensichtlich $\{f, g\} = -\{g, f\}$

$\longrightarrow$ Zeitentwicklung einer dynamischen Größe $f(q^i, p_i, t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}$$

insbesondere für $f = H$:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

wie bereits bekannt: H zeitlich konstant, wenn $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$

wichtige Eigenschaft der Poissonklammer:

Poissonklammer ist invariant gegenüber kanonischen Transformationen

Bew.: mit $x_i = (q^1, \ldots, q^f, p_1, \ldots, p_f)$ $\quad (i = 1, \ldots, 2f)$

$$\begin{aligned}
\{f, g\} &= -\left(\frac{\partial f}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q^f}, \frac{\partial f}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial p_f}\right)\begin{pmatrix} 0_f & \mathbb{1}_f \\ -\mathbb{1}_f & 0_f \end{pmatrix}\left(\frac{\partial g}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial q^f}, \frac{\partial g}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial p_f}\right)^T \\
&= -\frac{\partial f}{\partial x_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

kanonische Transformation: $x \longrightarrow y$, $f(x(y)), g(x(y))$

$$\{f, g\}_y = -\frac{\partial f}{\partial y_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial y_j} = -\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i} J_{ij} \frac{\partial x_l}{\partial y_j}\frac{\partial g}{\partial x_l} = -\frac{\partial f}{\partial x_k}\Bigg(\underbrace{MJM^T}_{J}\Bigg)_{kl}\frac{\partial g}{\partial x_l} = \{f, g\}_x$$

qed

Umkehrung: $\{x_i, x_j\} = -\delta_{ik} J_{kl} \delta_{jl} = -J_{ij}$, d.h.

$$\left\{q^i, q^j\right\} = \{p_i, p_j\} = 0\ , \quad \left\{p_i, q^j\right\} = \delta_i^j$$

Beh.: wenn bei der Transformation $x_i \longrightarrow y_i(x_j)$

$$\{y_i, y_j\} = \{x_i, x_j\} = -J_{ij}$$

dann handelt es sich um eine kanonische Transformation

Bew.:

$$\{y_i, y_j\} = -\frac{\partial y_i}{\partial x_k} J_{kl} \frac{\partial y_j}{\partial x_l} = -M_{ik}^{-1} J_{kl} M_{jl}^{-1} = -\left(M^{-1} J M^{-1\,T}\right)_{ij} = -J_{ij}$$

daher $\quad M^{-1} J M^{-1\,T} = J \quad \leftrightarrow \quad J = MJM^T$

$\longrightarrow \quad M \in Sp(2f)$ symplektisch qed

$\longrightarrow$ oft einfachste Charakterisierung kanonischer Transformationen

Hamiltonsche Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{dq^i}{dt} = \left\{H, q^i\right\} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{dp_i}{dt} = \{H, p_i\} = -\frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}$$

Jacobi-Identität

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \qquad \text{(Übung)}$$

$\longrightarrow$ Struktur einer Lie-Algebra

Erhaltungsgröße $f(q^i, p_i)$

$$\frac{df}{dt} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad \{H, f\} = 0$$

Theorem von Poisson
mit 2 Erhaltungsgrößen f, g ist auch $\{f, g\}$ erhalten

Bew.: mit Jacobi-Identität

$$\{H, \{f, g\}\} = -\{f, \underbrace{\{g, H\}}_{=0}\} - \{g, \underbrace{\{H, f\}}_{=0}\} = 0$$

Bem.:

1. Invariantes Volumen, Poissonklammer, ...: Beispiele für invariante Strukturen auf dem Phasenraum $\longrightarrow$ vollständige Behandlung mit modernen Methoden der Differentialgeometrie auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten (Arnol'd, Scheck, Thirring (Bd. 1))

2. Formale Analogie zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik

Mechanik	Quantenmechanik
Poissonklammer	Kommutator
$\{p_i, q^j\} = \delta_i^j$	$[\hat{p}_i, \hat{q}^j] = \hat{p}_i \hat{q}^j - \hat{q}^j \hat{p}_i = -i\hbar \delta_i^j$
$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0$	$[\hat{q}^i, \hat{q}^j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$
Koordinaten des Phasenraums	Operatoren eines Hilbertraums
Hamiltonsche Gleichungen	Heisenberg-Gleichungen

N.B.: QM nicht ableitbar aus klassischer Mechanik!

VI.4 Hamilton-Jacobi-Gleichung

gegeben: $H(p_i, q^i, t)$

gesucht: kanonische Transf. $\quad q^i, p_i \quad \to \quad Q^i, P_i$
sodass alle Q^i zyklische Koordinaten

Ansatz:

$$q^i, p_i; H(p_i, q^i, t) \underbrace{\longrightarrow}_{F_2(q^i, P_i, t)} Q^i, P_i; H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

wenn $\quad H' = 0 \quad \longrightarrow \quad Q^i = \beta^i = \text{konstant}, \quad P_i = \alpha_i = \text{konstant}$

Notation: $\quad F_2 =: S(q^i, P_i, t) = S(q^i, \alpha_i, t), \;\; p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q^i}, \;\; Q^i = \beta^i = \dfrac{\partial S}{\partial P_i}$

Hamilton-Jacobi-Gleichung
$$\boxed{H\left(\frac{\partial S}{\partial q^i}, q^i, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für $\quad S(q^i, \alpha_i, t)$

Lösung der Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial S(q^i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_k} & = & \beta^k \\ \dfrac{\partial S(q^i, \alpha_i, t)}{\partial q^k} & = & p_k \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} q^i(\alpha_j, \beta^j, t) \\ p_i(\alpha_j, \beta^j, t) \end{array}$$

lokal immer möglich, wenn $\quad \det\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q^j}\right) \neq 0$

Def.: vollständige Lösung $S(q^i, \alpha_i, t)$ (d.h. mit f unabhängigen Integrationskonstanten α_i) heißt Hamiltonsche Wirkungsfunktion

Grund für Bezeichnung:

$$S(q^i(t), \alpha_i, t): \qquad \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial S}{\partial t} = p_i \dot{q}^i - H = L$$

$$\longrightarrow \qquad S(q^i(t), \alpha_i, t) = \int_{t_0}^{t} dt' L(q^i(t'), \dot{q}^i(t'), t') + \;\; \text{konstant}$$

für die tatsächliche Lösung der Bewegungsgleichungen; $S(q^i(t), \alpha_i, t)$ ist hier nicht als Funktional von q^i aufzufassen

häufiger Spezialfall: $\quad \dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$

Ansatz: $\quad S(q^i, \alpha_i, t) = W(q^i, \alpha_i) - \alpha_f t \qquad \longrightarrow \qquad \dfrac{\partial S}{\partial q^i} = \dfrac{\partial W}{\partial q^i}$

$$H(\frac{\partial W}{\partial q^i}, q^i) - \alpha_f = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \alpha_f = E \qquad \text{(wenn } H \text{ Energie)}$$

Lösung: reduzierte Wirkungsfunktion (Hamiltonsche charakteristische Funktion)

$$W(q^i, \alpha_i) \;\text{ mit }\; \alpha_f = E$$

$$Q^k = \beta^k = \frac{\partial S(q^i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial W(q^i, \alpha_i)}{\partial \alpha_k} \qquad (k = 1, \ldots, f-1)$$

keine explizite Zeitabhängigkeit $\longrightarrow$ Bahnkurven (z.B. $r(\theta)$)

$$Q^f = \beta^f = \frac{\partial S}{\partial \alpha_f} = \frac{\partial W(q^i, \alpha_i)}{\partial \alpha_f} - t$$

ergibt Abhängigkeit von der Zeit: $\dfrac{\partial W(q^i, \alpha_i)}{\partial \alpha_f} = t + \beta^f$

formal analoge Struktur wie

$$p_k = \frac{\partial S(q^i, \alpha_i, t)}{\partial q^k} = \frac{\partial W(q^i, \alpha_i)}{\partial q^k}$$

trotzdem: Zeit t und Energie α_f sind keine kanonisch konjugierten Variable, da die Zeit keine dynamische Variable, sondern ein Parameter ist

Hamilton-Jacobi-Gleichung vor allem für Analogien herangezogen zwischen

Mechanik, Optik und Quantenmechanik

Praxis: partielle Differentialgleichungen i.a. viel schwieriger zu lösen als gewöhnliche DG $\longrightarrow$ vollständige Lösungen meist nur in Spezialfällen, wo Separation der Variablen möglich ($\rightarrow$ T2), d.h. wenn W von der Form ist

$$W = \sum_{i=1}^{f} W_i(q^i, \alpha_1, \ldots, \alpha_f) \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial W_i}{\partial q^j} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j$$

Übung: harmonischer Oszillator (wieder einmal)

VI.5 Integrable und allgemeine dynamische Systeme

Ausnahme in der Vielfalt der Hamiltonschen und erst recht der allgemeinen dynamischen Systeme:

(vollständig) integrable Systeme $\longrightarrow$

Lösung vollständig auf gewöhnliche Integrationen zurückführbar

offensichtlicher Zusammenhang mit der Existenz von Erhaltungsgrößen:

i. $f = 1, U(q) \quad \longrightarrow \quad E$

ii. $f = 3, U(r) \quad \longrightarrow \quad E, \vec{L}$

beide Systeme vollständig integrabel

betrachten im Folgenden nur Systeme mit $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$ (autonome Systeme)

Erhaltungsgrößen: $\quad g_\alpha(q^i, p_i) = g_\alpha(x_i) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$

Def.: n unabhängige Erhaltungsgrößen $g_\alpha(x_i)$ stehen in Involution zueinander, wenn

$$\{g_\alpha, g_\beta\} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n)$$

i. H ist einzige Erhaltungsgröße $\quad \longrightarrow \quad n = f = 1$

ii. $H, \vec{L}$ sind Erhaltungsgrößen

$$\{H, L_i\} = 0, \quad \text{aber} \quad \{L_i, L_j\} \neq 0 \quad \text{für} \quad i \neq j$$

außerdem

$$\left\{H, \vec{L}^2\right\} = \left\{\vec{L}^2, L_i\right\} = 0$$

daher: $\;H, \vec{L}^2, L_3$ in Involution $\quad \longrightarrow \quad n = f = 3$

iii. 2-Körper-Problem mit Potenzial $U(r): \quad f = 6$

$$H_{\text{rel}} = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + U(r), \vec{P}, \vec{L}^2_{\text{rel}}, L_{\text{rel},3} \qquad \longrightarrow \qquad n = 6$$

auch dieses System ist bekanntlich integrabel

Allgemeine Aussage (ohne Beweis)
System mit f Freiheitsgraden ist vollständig integrabel, wenn es $n = f$ unabhängige Erhaltungsgrößen g_α gibt, die in Involution zueinander stehen

außerdem:
vollständige Integrabilität $\;\leftrightarrow\; \exists$ globale Lösung $S(q^i, \alpha_j, t)$ der Hamilton-Jacobi-Gleichung

Beweis in einer Richtung trivial:

$$Q^i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta^i = \text{konstant} \qquad \longrightarrow \qquad \left\{Q^i, Q^j\right\} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, f)$$

harmonischer Oszillator ($f = 1$)

$$\begin{aligned}
H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 \quad &= \quad \omega I \qquad\qquad \text{früher}: \quad I = \varepsilon P \\
q = \sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \sin\theta \;, \qquad & p = m\omega\sqrt{\frac{2I}{m\omega}} \cos\theta \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \\
\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega \quad &\longrightarrow \quad \theta = \omega t + b \\
\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad &\longrightarrow \quad I = \text{konstant}
\end{aligned}$$

Bezeichnung (früher: $I = \varepsilon P$, $\theta = Q$)

θ: Winkelvariable, $\;I$: Wirkungsvariable

Phasenraum: $\quad$ Kreis S^1 mit $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Theorem (Liouville, Arnol'd; Kurzfassung)
jedes vollständig integrable System mit beschränkter Bewegung ist in f unabhängige harmonische Oszillatoren mit Frequenzen $\omega_i \quad (i = 1, \ldots, f)$ transformierbar

$f = 2$

Torus $S^1 \times S^1$

gegenüberliegende Punkte sind zu identifizieren

2 Fälle sind zu unterscheiden:

ω_2/ω_1 rational oder irrational

$\omega_1 = \omega_2$ (Beispiel)
strikt periodisch
Entartung, resonante Tori

ω_2/ω_1 irrational
quasiperiodisch
nichtresonante Tori dicht überdeckt

allgemeines integrables System:

Bewegung auf f-dimensionalem Torus $T^f = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ des $2f$-dimensionalen Phasenraums

realistische Situation:

Störungen des Systems durch äußere Einflüsse $\longrightarrow$ System wird nichtintegrabel

relevante Fragestellung: kleine Störungen $\stackrel{?}{\longrightarrow}$ kleine Änderungen

wichtige Anwendung: ist das Sonnensystem stabil gegenüber kleinen Störungen?

KAM-Theorem (Kolmogorov, Arnol'd, Moser; qualitative Formulierung ohne Beweis) :

wenn die Störungen „genügend klein" und die Frequenzen ω_i „genügend irrational" sind, dann findet die Bewegung im Phasenraum auf stabilen, aber deformierten nichtresonanten

Tori statt, d.h. der ursprüngliche Torus T^f des integrablen Systems wird nicht vollständig zerstört

Bem.: kein Beweis für die Stabilität des Sonnensystems!

<u>Warum ist die Irrationalität entscheidend, was passiert im Resonanzfall?</u>

einfaches Beispiel: gekoppelte harmonische Oszillatoren ($f = 2$)

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= \lambda f_1(x, y) \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= \lambda f_2(x, y) \end{aligned}$$

$\lambda = 0$: Torus T^2 mit Frequenzen ω_1, ω_2

betrachten folgenden Spezialfall: $\omega_1 = \omega_2 =: \omega, \quad f_1 = y, \quad f_2 = 0$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \lambda y \\ \ddot{y} + \omega^2 y &= 0 \qquad \longrightarrow \qquad y(t) = y_0 \cos\omega t \qquad (\text{mit } \dot{y}(0) = 0) \end{aligned}$$

daher: $\ddot{x} + \omega^2 x = \lambda y_0 \cos\omega t$

mit der speziellen Lösung $x(t) = \dfrac{\lambda y_0}{2\omega}\, t\, \sin\omega t$

$\longrightarrow$ wird auch für beliebig kleine λ beliebig groß (linearer Faktor t)
$\longrightarrow$ invariante Tori werden im Resonanzfall zerstört
$\longrightarrow$ Beispiel für so genanntes <u>deterministisches Chaos</u>

Beispiel im Sonnensystem: Asteroiden(Planetoiden)gürtel zwischen Mars und Jupiter zeigt auffallende (so genannte Kirkwoodsche) Lücken bei gewissen charakteristischen Frequenzverhältnissen, z.B. für

$$\omega_{\text{Jupiter}}/\omega_{\text{Asteriod}} = 1/3$$

Allgemeine (autonome) dynamische Systeme

$$\dot{x}_i = f_i(x_j) \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \qquad\qquad \text{autonom: } \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

i.a. „Reibungseffekte“ $\longrightarrow$ nicht-Hamiltonsche Systeme

wichtige Erkenntnis (Glättungssatz): spezifisch für ein dynamisches System sind die

<u>kritischen Punkte</u> und <u>globale Eigenschaften</u> (d.h. Verhalten für $t \to \infty$)

<u>i. Kritische (oder singuläre) Punkte</u>

Punkte x_j^0 mit $f_i(x_j^0) = 0 \quad \longrightarrow \quad x_j = x_j^0 =$ konstant

speziell für Hamiltonsches System: $H = \dfrac{p^2}{2m} + U(q)$

$$f_i = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \quad \longrightarrow \quad p = \frac{dU}{dq} = 0$$

daher: kritische Punkte $\equiv$ Gleichgewichtslagen des kanonischen Systems

Unterscheidung: stabil, instabil, Sattelpunkt $\longrightarrow$ unterschiedliches Verhalten in der Nähe von kritischen Punkten

ii. Globales Verhalten für $t \to \infty$

interessante Möglichkeit (nur) für nicht-Hamiltonsche Systeme (Liouville!): niedrigerdimensionale, abgeschlossene Gebiete im Phasenraum, die Trajektorien in Umgebung „anziehen“

$n = 2$: genau 2 Möglichkeiten

asymptotisch stabiler Grenzpunkt dim=0	Grenzzyklus (Attraktor) dim=1

bekanntes Beispiel für Attraktor: freier Fall mit Reibung (Kap. II)

$$\begin{aligned} & \dot{x}_1 = x_2 \quad , \quad \dot{x}_2 = -cx_2 - g \\ t \to \infty: \quad & x_2 = -g/c \quad , \quad x_1 \to \infty \quad (x_2: \text{ Grenzgeschwindigkeit}) \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Grenzzyklus ist eine Gerade (dim=1)

$n \geq 3$: weitere Möglichkeiten, z.B. seltsame Attraktoren (strange attractors): diffuse Teilmengen ohne übliche, aber mit fraktaler Dimension

$\longrightarrow$ deterministisches Chaos (z.B.: Scheck)

VII Kontinuumsmechanik

VII.1 Übergang zum Kontinuum

Abkehr von der Idealisierung des starren Körpers:

Relativabstände nicht mehr zeitlich konstant

<u>mikroskopische Beschreibung</u>: i.a. nur quantenmechanische Behandlung sinnvoll auf atomarem (molekularem) Niveau; für makroskopische Körper $\sim N_L = 6{\cdot}10^{23}$ Bewegungsgleichungen $\longrightarrow$ unmöglich, aber auch fast immer irrelevant $\longrightarrow$ statt mikroskopischer Details Mittelung über viele Moleküle, aber Mittelungsbereich $\ll$ Festkörper oder Flüssigkeit

<u>phänomenologische Kontinuumsmechanik</u>: Mittelung nicht wirklich durchgeführt, sondern direkt Gleichungen für gemittelte Größen gesucht

Beispiele: mittlere Auslenkung (Verschiebung) $\vec{u}(\vec{r},t)$
lokale (mittlere) Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r},t)$
Massendichte $\rho(\vec{r},t)$ mit Masse $M = \int d^3x\,\rho$
lokale Temperatur $T(\vec{r},t)$
Verzerrungstensor $\varepsilon(\vec{r},t)$
Spannungstensor $\sigma(\vec{r},t)$

alle Größen sind vom Typ $f(\vec{r},t)$: <u>Felder</u>

jedem Punkt $\vec{r}$ wird zu jeder Zeit t ein Skalar (ρ, T), ein Vektor $(\vec{u},\vec{v})$, ein Tensor 2. Stufe (ε,σ), ... zugewiesen: Skalarfeld, Vektorfeld, Tensorfeld, ... $\longrightarrow$

$$\boxed{\textbf{Feldtheorie der Kontinuumsmechanik}}$$

Punktmechanik:	Variable t	$\longrightarrow$	gewöhnliche Diffgl. = Bewegungsgleichungen
Kontinuumsmechanik:	Variable $t,\vec{r}$	$\longrightarrow$	partielle Diffgl. = Feldgleichungen

Bem.: in der klass. Mechanik entstehen Felder erst durch den Mittelungsprozess, in der Elektrodynamik (und in der Quantenfeldtheorie) sind Felder die fundamentalen dynamischen Größen

<u>Interpretation der zeitlichen Entwicklung</u>

i. <u>Eulersche Beschreibung</u>: Raumelement festgehalten

partielle Zeitableitung $\dfrac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}$: Änderung am festgehaltenen Punkt $\vec{r}$

Bsp.: Thermometer in Fluss gehalten $\longrightarrow$ $\dfrac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t}$ gemessen

ii. <u>Lagrangesche Beschreibung</u>: mitbewegtes Raumelement betrachtet

zur Zeit t : $f(\vec{r},t)$
zur Teit $t+dt$: $f(\vec{r}+\dot{\vec{r}}\,dt, t+dt) = f(\vec{r},t) + \dfrac{\partial f}{\partial t}dt + \vec{\nabla} f\cdot\vec{v}\;dt + O(dt^2)$

$\longrightarrow$ totale Zeitableitung $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$

gibt Änderung von f im mitbewegten Raumelement an

Bsp.: Thermometer in Fluss geworfen $\longrightarrow$ $\dfrac{dT}{dt}$ registriert

$\boxed{\text{Traditionelle Einteilung der phänom. Kontinuumsmechanik}}$

<u>Elastizitätstheorie</u>	<u>Hydrodynamik</u>
kleine Bewegungen um wohldefinierte Gleichgewichtslagen betrachtet	Flüssigkeiten und Gase keine vorgeg. Gleichgewichtslage mehr

gleicher prinzipieller Aufbau für beide Gebiete, nicht zuletzt in Phasenübergängen manifest:

Festkörper $\leftrightarrow$ Flüssigkeiten $\leftrightarrow$ Gase

VII.2 Lineare Kette

Modell für „eindimensionalen Festkörper“

Auslenkungen

$q_a(t) = x_a(t) - x_a^0$

alle Teilchen gleiche Masse m; Gleichgewichtslage : $x_a^0 - x_{a-1}^0 = d \quad (a = 1, \ldots, n+1)$

eindimensionales Problem $\longrightarrow$ nur longitudinale Schwingungen

Kontinuumslimes auch zur Beschreibung transversaler Schwingungen einer Saite geeignet

<u>Vor.</u>: Wechselwirkung nur zwischen nächsten Nachbarn ($\sim$ kurze Reichweite)

$$U(x_0, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{a=0}^{n} V_a = \sum_{a=0}^{n} V(x_a - x_{a+1}) = \sum_{a=0}^{n} V(q_a - q_{a+1} - d)$$

Oszillatornäherung: $y_a = q_a - q_{a+1} - d \quad \longrightarrow \quad$ um $y_a^0 = -d$ entwickelt

$$V(y_a) \;=\; V(-d) + (q_a - q_{a+1}) \underbrace{\frac{dV}{dy_a}|_{y_a=-d}}_{b} + \frac{1}{2}(q_a - q_{a+1})^2 \underbrace{\frac{d^2V}{dy_a^2}|_{y_a=-d}}_{m\omega_0^2} + \ldots$$

$$U(q_0, \ldots, q_{n+1}) \;=\; (n+1)V(-d) + b(q_0 - q_{n+1}) + \frac{m}{2}\omega_0^2 \sum_{a=0}^{n} (q_a - q_{a+1})^2$$

Oszillatorpotenzial bis auf linearen Term $\sim b \quad \longrightarrow$

durch geeignete Randbedingungen eliminiert

Standard-Randbedingungen:

- periodisch (Ring): $q_0(t) \equiv q_{n+1}(t) \quad \longrightarrow \quad$ Torus (Kreis) S^1

- fest (Wand, eingespannte Saite): $q_0(t) = q_{n+1}(t) = 0 \;\; \forall t$

Lagrangefunktion

$$L = T - U = \frac{m}{2} \sum_{a=0}^{n} \left[\dot{q}_a^2 - \omega_0^2 (q_a - q_{a+1})^2 \right]$$

Euler-Lagrange (nur für $a = 1, \ldots, n$ interessant)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = m \ddot{q}_a = \frac{\partial L}{\partial q_a} = -m\omega_0^2 (q_a - q_{a-1}) - m\omega_0^2 (q_a - q_{a+1})$$

$$\longrightarrow \qquad \ddot{q}_a + \omega_0^2 (2q_a - q_{a-1} - q_{a+1}) = 0 \qquad a = 1, \ldots, n$$

Struktur der linearen Kette: $\underline{n \text{ gekoppelte harmonische Oszillatoren}}$

allg. Methode $\longrightarrow$ Kleine Schwingungen (Kap. IV)

Ansatz für Normalkoordinaten $Q_i(t)$ als Fourierkoeffizienten:

$$q_a(t) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(t) \sin \left(\frac{ai\pi}{n+1} \right)$$

erfüllt bereits die Randbedingung $q_0(t) = q_{n+1}(t) = 0$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen:

$$\sum_i \left\{ \ddot{Q}_i \sin \left(\frac{ai\pi}{n+1} \right) + \omega_0^2 Q_i \left[2 \sin \left(\frac{ai\pi}{n+1} \right) - \sin \left(\frac{(a-1)i\pi}{n+1} \right) - \sin \left(\frac{(a+1)i\pi}{n+1} \right) \right] \right\} = 0$$

mit $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin \dfrac{\alpha+\beta}{2} \cos \dfrac{\alpha-\beta}{2} \qquad \longrightarrow$

$$\sin \left(\frac{(a-1)i\pi}{n+1} \right) + \sin \left(\frac{(a+1)i\pi}{n+1} \right) = 2 \sin \left(\frac{ai\pi}{n+1} \right) \cos \left(\frac{i\pi}{n+1} \right)$$

und daher

$$\sum_{i=1}^{n} \sin \left(\frac{ai\pi}{n+1} \right) \left\{ \ddot{Q}_i + 2\omega_0^2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n+1} \right) Q_i \right\} = 0 \qquad a = 1, \ldots, n$$

Umkehrung der Fouriertransformation:

$$\ddot{Q}_i + 2\omega_0^2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n+1} \right) Q_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

tatsächlich n Normalkoordinaten Q_i mit Frequenzquadraten

$$\omega_i^2 = 2\omega_0^2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n+1} \right) = 4\omega_0^2 \sin^2 \left(\frac{i\pi}{2(n+1)} \right) \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Dispersionrelation} \quad (i = 1, \ldots, n) \\ \omega_i = 2\omega_0 \sin \dfrac{i\pi}{2(n+1)} \end{array}}$$

allg. Lösung:

$$q_a(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin\left(\frac{ai\pi}{n+1}\right) \sin(\omega_i\ t + \delta_i)$$

mit $2\,n$ Integrationskonstanten A_i, δ_i

Kontinuumslimes

$$d \to 0,\ n \to \infty, \quad \text{wobei } l = d(n+1) \text{ festgehalten wird}$$

tatsächlich (klassische Beschreibung!): $10^{-10}\,\mathrm{m} \ll d \ll l\ ,\qquad 1 \ll n \ll 10^{10}\,l\,\mathrm{m}^{-1}$

Koordinaten werden zu einem Feld: $q_a(t) \longrightarrow \varphi(x,t) \qquad (0 \leq x \leq l)$

$$ad = \frac{al}{n+1} \longrightarrow x$$

$$\begin{aligned}
q_{a+1} - q_a \quad &\longrightarrow \quad \varphi((a+1)d,t) - \varphi(ad,t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} d + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + O(d^3) \\
q_a - q_{a-1} \quad &\longrightarrow \quad \varphi(ad,t) - \varphi((a-1)d,t) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(-d) - \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + O(d^3)
\end{aligned}$$

daher: $\quad q_{a+1} + q_{a-1} - 2q_a \longrightarrow d^2 \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + O(d^4)$

Bewegungsgleichungen $\qquad \ddot{q}_a = \omega_0^2(q_{a-1} + q_{a+1} - 2q_a)$

werden im Kontinuumslimes zu einer Feldgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \omega_0^2\left[d^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + O(d^4)\right] \xrightarrow{d\to 0} c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

notwendig für Existenz eines Kontinuumslimes: $\omega_0 \to \infty$ mit $\omega_0 d \to c \neq 0$

eindimensionale Wellengleichung mit Wellengeschwindigkeit c

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0}$$

Schallausbreitung in Festkörpern ($d \sim 10^{-10}\,\mathrm{m}$)

He : $\quad c \sim 200\,\mathrm{m\,s}^{-1}$
Cu : $\quad c \sim 4000\,\mathrm{m\,s}^{-1}$

Schlussfolgerung:

sehr verschiedene $\omega_0 \quad \longrightarrow \quad$ sehr unterschiedliche interatomare Kräfte

Kontinuumslimes in der Lagrangefunktion

$$\sum_a \to \int dx\ , \qquad m \to d\,\rho \quad \text{mit (linearer) Massendichte } \rho$$

$$m\omega_0^2(q_{a+1} - q_a)^2 \quad \longrightarrow \quad d\rho\omega_0^2 d^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \simeq\ d\rho c^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$$

Kontinuumslimes: $d \to dx$, $\quad L = \int_0^l dx \mathcal{L}$ $\quad$ mit Lagrangedichte $\mathcal{L}\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}, x, t\right)$

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right]$$

Hamiltonsches Prinzip für Feldtheorien $\quad \longrightarrow$

$$\boxed{\text{Euler-Lagrange Feldgleichungen}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0 \\
\frac{\rho}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}2\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(-c^2)2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] &= 0 \\
\longrightarrow \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 0
\end{aligned}$$

<u>Lösung der Wellengleichung</u>

besonders einfach in einer Raumdimension $\quad \longrightarrow$
jede 2-fach diff. Funktion $f(x - ct) = \varphi(x, t)$ ist Lösung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (-c)^2 f''(x - ct), \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f''(x - ct) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

typisches

Wellenpaket

$f(x - ct_0)$ für $t = t_0$

$t > t_0$: $\quad$ z.B. Maximum bei $x - ct = x_0 - ct_0 \quad \longrightarrow \quad x = x_0 + c(t - t_0)$

$\longrightarrow \quad$ gesamte Kurve wandert mit Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = c$ nach rechts

$\longrightarrow \quad f(x - ct)$ nach rechts laufende Welle

<u>Spezialfall:</u> $\quad$ monochromatische (ebene) Welle

$$f(x - ct) = f_0 e^{ik(x - ct)} = f_0 e^{ikx - i\omega t} \qquad \text{mit} \quad \omega = kc$$

N.B.: wie immer $\mathrm{Re} f$ oder $\mathrm{Im} f$ zu nehmen, also $\sin k(x - ct)$ oder $\cos k(x - ct)$

Wellenzahl k, Kreisfrequenz ω, Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, Periode $T = 1/\nu$

monochromatische Welle ist räumlich periodisch mit Periode λ (Wellenlänge): $k\lambda = 2\pi$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu}$$

Wellengeschwindigkeit c ist unabhängig von der Wellenlänge ($\leftarrow$ Kreisfrequenz ω ist linear in der Wellenzahl k):

Lösungen der Wellengleichung zeigen keine Dispersion

natürlich gibt es auch nach links laufende Wellen $g(x + ct)$

allgemeine Lösung in einer Raumdimension:

$$\varphi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Übung: Anfangswertproblem

geg.: $\varphi(x, t = 0) = a(x), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}(x, 0) = b(x)$

gesucht: Lösung $\varphi(x,t)$ der eindim. Wellengleichung mit diesen Anfangsbedingungen

Transversalschwingungen der eingespannten Saite

Methode: Kontinuumslimes der allg. Lösung der linearen Kette

stehende Welle statt laufender Wellen (durch Überlagerung laufender Wellen)

lineare Kette:

$$q_a(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin\left(\frac{ai\pi}{n+1}\right) \sin(\omega_i\, t + \delta_i)$$

$$ad = \frac{al}{n+1} = x, \qquad \sin\left(\frac{ai\pi}{n+1}\right) \to \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$$

$$\omega_i = 2\omega_0 \sin\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right) = 2\omega_0 \sin\left(\frac{i\pi d}{2l}\right) \stackrel{d\to 0}{\longrightarrow} 2\omega_0 \frac{i\pi d}{2l} = \frac{i\pi}{l} c = k_i c$$

Bem.: Ableitung gilt nicht mehr für sehr große i, d.h. für sehr große Frequenzen, wo die körnige (atomare) Struktur der Materie relevant wird $\quad \longrightarrow \quad i \ll \frac{l}{\pi d}$

Lösung im Kontinuumslimes (mit Wellenzahlen $k_i = i\pi/l$)

$$\varphi(x,t) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} A_i \sin(k_i\, x) \sin(k_i\, ct + \delta_i)$$

Randbedingung der eingespannten Saite erfüllt: $\varphi(x = 0, t) = \varphi(x = l, t) = 0$

für festes t:

$$\varphi(x,t) \sim \sin\frac{i\pi x}{l} \qquad \longrightarrow \qquad i - 1 \text{ Knoten zwischen den beiden Enden}$$

$i = 1$: Grundschwingung

$i = 2$: 1. Oberschwingung

Bem.: Koeffizienten A_i, δ_i aus Anfangsbedg. zu bestimmen (Fouriertransformation)

VII.3 Elastizitätstheorie

Auslenkungen aus Gleichgewichtslage betrachtet (für feste Zeit t)

Vor.: $r = |\vec{r}|$ und Auslenkungen $\vec{u}(\vec{r}, t)$ klein

$\longrightarrow$ $r^2, \vec{u}^2$ vernachlässigt

kart. Koord.: $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$ (t festgehalten)

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{0}) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} x_j + O(x_j^2)$$

$$u_i(\vec{r}) \simeq u_i(\vec{0}) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} x_j = u_i(\vec{0}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) x_j$$

$$\begin{aligned} \left((\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \vec{r}\right)_i &= \varepsilon_{ikj} (\vec{\nabla} \times \vec{u})_k x_j = \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{klm} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} x_j \\ &= -(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \frac{\partial u_m}{\partial x_l} x_j = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) x_j \end{aligned}$$

Def.: kartesische Komponenten des Verzerrungs(Dehnungs)tensors ϵ

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \qquad \epsilon^T = \epsilon$$

daher insgesamt

$$\boxed{u_i(\vec{r}) = u_i(\vec{0}) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{rot} \vec{u}(\vec{0}) \times \vec{r}\right)_i + \epsilon_{ij}(\vec{0}) x_j + O(r^2)}$$

N.B.: $\operatorname{rot} \vec{u}$ und ϵ sind am (allerdings beliebigen) Punkt $\vec{0}$ zu nehmen

Folgerung: allgemeine (kleine) Auslenkung besteht aus 3 Komponenten

i. $\vec{u}(\vec{0})$: Translation

der beiden Punkte

$\vec{0}$ und $\vec{r}$ um $\vec{u}(\vec{0})$

ii. $\frac{1}{2}(\mathrm{rot}\,\vec{u}\times\vec{r}) = \vec{\Omega}\times\vec{r}$: Rotation des Körpers

mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{u}$

beim starren Körper: Translation und Rotation räumlich konstant

neues Element:

iii. $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$: Verzerrung des elastischen Körpers

$\epsilon^T = \epsilon \qquad \longrightarrow \qquad \exists$ ein (i.a. von $\vec{r}$ abhängiges) Orthonormalsystem mit

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{Hauptachsentransformation}$$

Volumsänderung eines infinitesimalen Quaders (Translation und Rotation erhalten Volumen)

$$\Delta x_i = u_i = \epsilon_{ii} x_i \qquad (\text{keine} \sum_i)$$

$$\text{Vor.:} \quad |\Delta x_i| \ll |x_i|$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{(x_1+\Delta x_1)(x_2+\Delta x_2)(x_3+\Delta x_3) - x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3} \simeq \frac{\Delta x_1\, x_2x_3 + \Delta x_2\, x_3x_1 + \Delta x_3\, x_1x_2}{x_1x_2x_3} \\ &= \epsilon_{11}+\epsilon_{22}+\epsilon_{33} = \mathrm{tr}\,\epsilon \end{aligned}$$

Folgerung: Volumsänderung durch $\mathrm{tr}\,\epsilon$ charakterisiert

lineare Algebra: $\mathrm{tr}\,\epsilon$ unabhängig von Wahl des Orthonormalsystems $\longrightarrow$
sinnvolle Aufteilung:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \hat{\epsilon} + \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\epsilon\ \mathbb{1} \\ \epsilon_{ij} &= \hat{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\epsilon\ \delta_{ij} \end{aligned}$$

da $\quad \mathrm{tr}\,\epsilon = \mathrm{tr}\,\hat{\epsilon} + \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\epsilon\ 3 \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{tr}\,\hat{\epsilon} = 0$

allgemeine Form einer infinitesimalen Auslenkung

$$u_i(\vec{r}) = \underbrace{u_i(\vec{0})}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathrm{rot}\,\vec{u}(\vec{0})\times\vec{r}\right)_i}_{\text{Rotation}} + \underbrace{\hat{\epsilon}_{ij}(\vec{0})x_j}_{\text{Scherung}} + \underbrace{\frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\epsilon(\vec{0})x_i}_{\text{Volumsänderung}} + O(r^2)$$

Scherung: Formänderung ohne Volumsänderung

N.B.: alle Felder außerdem zeitabhängig

Spannungstensor

Vor.: innere (atomare) Kräfte im elastischen Körper sind kurzreichweitige Nahkräfte, dagegen haben äußere Kräfte (z.B. Gravitation) i.a. makroskopische Reichweite

bestimmtes Volumselement herausgegriffen:

Kräfte der umgebenden Elemente wirken dann in 1. Näherung nur auf die Oberfläche

$$K_i^{\text{elast}} = \int \sigma_{ij} dF_j$$

elastische Kraft in $i-$te Richtung

auf Flächenelement $d\vec{F}$

Dimension von σ: $K/F =$ Druck $\longrightarrow$ $[\sigma] = \mathrm{N\,m^{-2}} =$ Pa(scal)

Vektoranalysis im $\mathbb{R}^3$: Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

Gaußscher Satz:

$$\int_V d^3x\, \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \int_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{A}$$

in Komponenten

$$\int_V d^3x\, \frac{\partial A_j}{\partial x_j} = \int_{\partial V} dF_j A_j$$

offensichtliche Verallgemeinerung für Tensoren 2. Stufe

$$\int_V d^3x\, \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \int_{\partial V} dF_j \sigma_{ij}$$

$$\longrightarrow \qquad \text{elastische Kraft} \quad K_i^{\text{elast}} = \int \sigma_{ij} dF_j = \int_V d^3x\, \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

zusätzlich i.a. äußere Kraft: $\vec{K}_{\text{ext}}(t) = \int_V d^3x\, \vec{k}(\vec{r},t)$

mit Kraftdichte $\vec{k}$ $\quad([\vec{k}] = \mathrm{N\,m^{-3}})$

Ziel: Bewegungsgleichung für „kleines“ Volumselement d^3x

in Analogie zur Punktmechanik $(m\ddot{\vec{r}} = \vec{K})$

Kontinuum: Masse $m = \rho(\vec{r},t)\, d^3x$ mit Massendichte ρ

Geschwindigkeit(sfeld) $\vec{v}(\vec{r},t) = \dfrac{d\vec{u}(\vec{r},t)}{dt}$

Beschleunigung(sfeld) $\dfrac{d\vec{v}(\vec{r},t)}{dt}$

Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik

$$\rho(\vec{r},t)\frac{dv_i(\vec{r},t)}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}(\vec{r},t)}{\partial x_j} + k_i(\vec{r},t)$$

3 partielle Diffgl. in den Variablen $\vec{r}, t$

$\longrightarrow$ Gleichgewichtsbedingung: $\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + k_i = 0$

Beh.: Spannungstensor ist symmetrisch: $\sigma^T = \sigma$

zum Beweis betrachten wir das Drehmoment auf ein Volumen V (analog zu $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{K}$)

$$\begin{aligned}
N_i &= \varepsilon_{ijk} \int_V d^3x\, x_j \left(\frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} + k_k \right) \\
&= \varepsilon_{ijk} \int_V d^3x \left[x_j k_k + \frac{\partial (x_j \sigma_{kl})}{\partial x_l} - \frac{\partial x_j}{\partial x_l} \sigma_{kl} \right] \\
&= \varepsilon_{ijk} \int_V d^3x\, x_j k_k + \varepsilon_{ijk} \int_{\partial V} dF_l x_j \sigma_{kl} - \varepsilon_{ijk} \int_V d^3x\, \sigma_{kj}
\end{aligned}$$

nach Vor. wirken elastische Kräfte aber nur auf der Oberfläche von V

da V beliebig $\longrightarrow$ $\varepsilon_{ijk}\sigma_{kj} = 0$ $\longrightarrow$ $\sigma_{kj} = \sigma_{jk}$ qed

Erfahrungstatsache des Hookeschen Gesetzes führt zur

Definition des elastischen Körpers:
für kleine Deformationen sind die Spannungen den Dehnungen proportional

entspricht Oszillatornäherung: $\vec{K} \sim \vec{r}$

allgemeinster Ansatz:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

wobei C der Tensor (4. Stufe) der elastischen Konstanten ist

Zahl der unabhängigen elastischen Konstanten:

Symmetrie $i \leftrightarrow j, k \leftrightarrow l$ $\longrightarrow$ $6 \times 6 = 36$ Elemente

o.B.: aus Untersuchung der potenziellen Energie des elastischen Körpers $\longrightarrow$ $C_{ijkl} = C_{klij}$

$\longrightarrow$ C $\sim$ symmetrische 6×6 Matrix $\longrightarrow$ $\dfrac{n(n+1)}{2}|_{n=6} = 21$

trikliner Kristall: tatsächlich 21 unabhängige elastische Konstanten

Symmetrien des Körpers: Reduktion der "

maximale Symmetrie: isotroper Körper

keine Richtung ausgezeichnet $\longrightarrow$ C nur aus Kronecker-Delta zu konstruieren

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$\longrightarrow$ isotroper Körper hat nur 2 elastische Konstanten:

Lamésche Elastizitätsparameter λ, μ (Konstanten für homogenen Körper)

$\longrightarrow$ Spannungstensor des isotropen Körpers

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= [\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]\,\epsilon_{kl} \\ &= \lambda\,\mathrm{tr}\,\epsilon\,\delta_{ij} + \mu(\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}) = \lambda\,\mathrm{tr}\,\epsilon\,\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \\ &= \lambda\,\mathrm{tr}\,\epsilon\,\delta_{ij} + 2\mu\left(\hat{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\epsilon\,\delta_{ij}\right) = \left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right)\mathrm{tr}\,\epsilon\,\delta_{ij} + 2\mu\hat{\epsilon}_{ij}\end{aligned}$$

<u>Torsionsmodul $\mu \geq 0$</u>: Verhalten des Körpers bei Scherungen

<u>Vor.</u>: auf den Körper wirke ein isotroper Druck $p \geq 0$ von außen

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} \qquad \longrightarrow \qquad \sigma_{ij}dF_j = -p\,dF_i$$

$\longrightarrow$ gleicher Druck in allen
Richtungen entgegengesetzt $d\vec{F}$
($d\vec{F}$ zeigt per Def. aus Fläche heraus)

$$\mathrm{tr}\,\sigma = 3\,\mathrm{tr}\,\epsilon\left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right) \qquad \longrightarrow \qquad \text{im isotropen Körper}$$

$$-3p = 3\,\mathrm{tr}\,\epsilon\left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right) \qquad \longrightarrow \qquad p = -\left(\lambda + \frac{2\mu}{3}\right)\frac{\Delta V}{V}$$

$$K := -\frac{pV}{\Delta V} = \lambda + \frac{2\mu}{3} \geq 0 \qquad \text{Kompressionsmodul}$$

$$\kappa = 1/K \qquad \text{Kompressibilität}$$

<u>Dehnung in einer Richtung</u>

Körper im Ursprung festgehalten
$\sigma_{11}(x = L) = |\vec{K}|/F = p$
jetzt: p Zug (statt Druck nach innen)
$\sigma_{ij} = 0$ sonst an Oberfläche

Gleichgewichtsbedingung: im Inneren $\vec{k} = \vec{0}$ $\longrightarrow$ $\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$ $\longrightarrow$ $\sigma_{ij} = \text{konstant}$

$\longrightarrow$ $\sigma_{11} = p, \;\; \sigma_{ij} = 0$ sonst (überall im Körper)

<u>Hooke</u>: $\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda\,\mathrm{tr}\,\epsilon\,\mathbb{1}$

$$\mathrm{tr}\,\sigma = (2\mu + 3\lambda)\mathrm{tr}\,\epsilon \qquad \longrightarrow \qquad \epsilon = \frac{1}{2\mu}\sigma - \frac{\lambda\,\mathrm{tr}\,\sigma}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}\mathbb{1}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \epsilon_{11} = \frac{p}{2\mu}\left(1 - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\right) = \frac{p(\mu + \lambda)}{\mu(2\mu + 3\lambda)} =: \frac{p}{E}$$

<u>Elastizitätsmodul</u>: $\quad E = \dfrac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \;\geq\; 0$

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = -\frac{p}{2\mu}\frac{\lambda}{(2\mu + 3\lambda)} =: -\frac{\sigma}{E}\,p$$

Poissonsche Querkontraktionskonstante: $\sigma = \dfrac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}$ (auch: $\mu, m, \nu, \ldots$ bezeichnet)

Lamésche Konstanten λ, μ können natürlich durch E, σ ausgedrückt werden

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

Kompressionsmodul $K = \lambda + \dfrac{2\mu}{3} = \dfrac{E}{3(1-2\sigma)} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma \leq \dfrac{1}{2}$

Randbedingung: Körper im Ursprung fest $\longrightarrow$ $\vec{u}(\vec{0}) = \vec{0}$

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{p}{E} \quad \longrightarrow \quad u_1(x) = \frac{p}{E}x \qquad \text{N.B.}: \epsilon_{ij} = 0 \ (i \neq j)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{\sigma}{E}p \quad \longrightarrow \quad u_2(y) = -\frac{\sigma}{E}py, \quad u_3(z) = -\frac{\sigma}{E}pz$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{u_1(L)}{L} = \frac{p}{E} \qquad \frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta B}{B} = \frac{u_3(H)}{H} = -\frac{\sigma}{E}p$$

Höhe und Breite werden kleiner bei Zug in Längsrichtung $\longrightarrow$

$$0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$$

E, σ: als phänomenologische Parameter experimentell zu bestimmen

E: notwendiger Druck, um L zu verdoppeln
$\longrightarrow$ immer weit außerhalb des elastischen Bereichs

Größenordnung aus mikroskopischer Theorie (Quantentheorie des Festkörpers):

$[E] = [\vec{K}/F] =$ Energie/Volumen $\longrightarrow$ muss von Bindungsenergie der Atome (Moleküle) stammen

Bsp.: Aluminium

$$E_B = \frac{\text{Bindungsenergie}}{\text{Atom}} = \text{Ablösearbeit} = 4.25 \text{ eV} = 4.25 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} = \frac{E_B \times \text{Atome}}{\text{Volumen}} = \frac{E_B\, \rho_M(\text{Al})}{M_{\text{Al-Atom}}} = \frac{4.25 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\text{J}\ 2.7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}}{27 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}\text{kg}}$$

$$= 4 \cdot 10^{10} \text{ J m}^{-3} = 4 \cdot 10^{10} \text{ N m}^{-2} = 4 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

experimentell: $E \sim 7 \cdot 10^{10}$ Pa ($\sigma_{\text{Al}} = 0.34$)

Vergleich: Normalluftdruck $\sim 10^5$ Pa

$\longrightarrow$ Berechtigung für Idealisierung des starren Körpers:
sehr starke Bindungskräfte im Festkörper

VII.4 Schallwellen

isotrope Festkörper: λ, μ

Flüssigkeiten, Gase: keine Torsion ($\mu = 0$), $\lambda = K = 1/\kappa$

Vor.: Amplituden der Schallwellen klein $\longrightarrow$ $O(u^2), O(v^2)$ vernachlässigt

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}v_i\right) \simeq \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} \simeq \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + k_i$$

Vor.: $\vec{k} = \vec{0}$ (keine äußere Kraft); λ, μ Konstanten

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda\,\mathrm{tr}\,\epsilon\,\mathbb{1} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 2\mu\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} + \lambda\frac{\partial \epsilon_{kk}}{\partial x_i}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \\
&= \frac{1}{2}\Delta u_i + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{div}\,\vec{u}
\end{aligned}$$

$$\Delta A = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}A = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 A}{\partial x_i^2} \qquad \text{Laplace-Operator}$$

$$\epsilon_{kk} = \mathrm{div}\,\vec{u} \qquad \longrightarrow \qquad \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu\Delta u_i + \mu\nabla_i \mathrm{div}\,\vec{u} + \lambda\nabla_i\mathrm{div}\,\vec{u}$$

Feldgleichung für Schallwellen

$$\boxed{\rho\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu\Delta\vec{u} + (\mu+\lambda)\vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\vec{u})}$$

<u>Vor.</u>: Wellenausbreitung in x-Richtung, d.h. $\vec{u}(x,t)$

$$\longrightarrow \qquad \Delta\vec{u} = \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2}, \quad \mathrm{div}\,\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + (\mu+\lambda)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \qquad \text{longitudinale Wellen}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \qquad (i = 2,3) \qquad \text{transversale Wellen}$$

alle vom Typ $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$ $\longrightarrow$ eindimensionale Wellengleichungen

allgemeine Lösung ($d = 1$):

$$\varphi(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

mit beliebigen, 2-mal diff. Funktionen f, g

Spezialfall: monochromatische Welle

$$\sin(kx - \omega t) \qquad \text{mit} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi c}{\lambda} = kc$$

i.a. Überlagerung verschiedener Frequenzen:

$$\begin{aligned}
f(x - ct) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)}\tilde{f}(\omega) \\
\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} f(x - ct)
\end{aligned}$$

Fourierzerlegung mit Frequenzspektrum $|\tilde{f}(\omega)|^2$

Wellengleichung: Schallgeschwindigkeit unabhängig von der Frequenz

bei mehratomigen Gasen und hohen Frequenzen:

Dispersion $\leftrightarrow$ Schallgeschwindigkeit frequenzabhängig

Isotrope Festkörper

i. Longitudinale Schallwellen

Auslenkung in Richtung der Wellenausbreitung: $u_1(x,t)$

$$c_l = \sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}$$

i. Transversale Schallwellen

Auslenkung orthogonal auf Wellenausbreitung: $u_2(x,t), u_3(x,t)$

$$c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}$$

verschwindet für Flüssigkeiten und Gase ($\mu = 0$)

empirischer Befund: Erdbebenwellen gehen kaum durch die Erde
$\longrightarrow$ Erdinneres flüssig

$$\frac{c_t^2}{c_l^2} = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} = \frac{1-2\sigma}{1+1-2\sigma} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{da} \quad 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$$

$\longrightarrow$ c_l immer größer als c_t

Gase, Flüssigkeiten: $c = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\kappa\rho}}$

genauer ($\rightarrow$ T4): adiabatische Kompressibilität κ_S,
da praktisch kein Wärmeaustausch mit der Umgebung

allgemeine Schallwelle

solange $O(u^2), O(v^2)$ vernachlässigbar $\longrightarrow$ Wellengleichung lineare partielle Diffgl. $\longrightarrow$ Superpositionsprinzip gilt: Überlagerung von longitudinalen und transversalen Schwingungen verschiedener Frequenzen (Fourieranalyse)

stillschweigende Voraussetzung: Medium unendlich ausgedehnt
$\longrightarrow$ Randbedingungen irrelevant

weitaus schwieriger zu behandeln: Gleichgewicht und Schwingungen endlicher Festkörper
(Saite, Membran, Stab, Platte, ...)

VII.5 Ideale Flüssigkeiten

Festkörper	Fernordnung (kristalliner Aufbau)	Elastizitätstheorie
Flüssigkeiten	Nahordnung	Hydrodynamik
Gase	keinerlei Ordnung	Aerodynamik (Teil der Hydrodynamik)

Def. der idealen Flüssigkeit:

keine Reibungskräfte (Idealisierung!) $\longrightarrow$ keine Torsionskräfte $\longrightarrow$ $\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}$

Druck einzige Kenngröße der inneren Kräfte ($p > 0:$ Druck auf Oberfläche)

$$\sigma_{ij} dF_j = -p\, dF_i$$

Feldgleichung der Hydrodynamik (Aerodynamik):

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_i}{dt} &= k_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{k} - \vec{\nabla} p = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{v} \right) \end{aligned}$$

Def.: Kraft pro Masse $\quad \vec{f} = \dfrac{\vec{k}}{\rho} \qquad [\vec{f}] = \dfrac{\mathrm{K\,m^3}}{\mathrm{m^3\,kg}} = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = \mathrm{m\,s^{-2}}$

etwa für Gravitation: $\vec{K} = m\vec{g} \qquad \longrightarrow \qquad \vec{f} = \vec{g}$

mit $\quad \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{v} = \dfrac{1}{2} \vec{\nabla} \vec{v}^2 - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$

Eulersche Gleichung der Hydrodynamik

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \vec{v}^2 - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p}$$

3 partielle Diffgl. für 5 Unbekannte $\quad \vec{v}, \rho, p$

Zustandsgleichung: $\quad p = p(\rho)$

z.B. ideales Gas $\quad pV = NkT \quad \longrightarrow \quad p = \rho \dfrac{NkT}{M} = \rho \dfrac{kT}{M_{\text{Molekül}}}$

$k = 1.38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$ $\qquad$ Boltzmann-Konstante

noch eine Gleichung benötigt für vollständige Lösung

Kontinuitätsgleichung

Flüssigkeit kann nicht verschwinden

Vor.: Volumen festgehalten

$\rho\vec{v}:$ Massenfluss = Masse/(Zeit $\times$ Fläche)

Massenbilanz:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3x\, \rho = -\int_{\partial V} d\vec{F} \cdot \rho\vec{v} = -\int_V d^3x\, \operatorname{div}(\rho\, \vec{v})$$

da Volumen beliebig $\longrightarrow$ $$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)\right] = 0$$

Euler-Gleichung: nichtlineare partielle Diffgl. $\longrightarrow$
i.a. schwierig zu lösen, kein Superpositionsprinzip

Hydrostatik

$$\vec{v} \equiv \vec{0} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 : \quad \rho \text{ zeitlich konstant}$$

Eulersche Gleichung: $\vec{f} = \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p =: \vec{\nabla}P$ mit $P(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp'}{\rho(p')}$

für konservative Kraft: $\vec{f} = -\vec{\nabla}u$ $\qquad u :$ Potenzial/Masse

Euler: $-\vec{\nabla}u = \vec{\nabla}P$ $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Gleichung der Hydrostatik}\\ u + P = \text{ konstant}\end{array}}$$

i. Inkompressible Flüssigkeit im Schwerefeld

inkompressibel: $\rho =$ konstant (auch räumlich) $\longrightarrow$ $P = \frac{p - p_0}{\rho}$

Gravitation: $u = -\vec{g}\cdot\vec{r} = g\,z$

$\longrightarrow$ $\rho g z + p =$ konstant $\longrightarrow$ $p = p(z)$

$\longrightarrow$ hydrostatischer Druck ($\rightarrow$ kommunizierende Gefäße)

Kraft auf Körper in der Flüssigkeit:

$$K_i = \int_V d^3x\, \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\int_V d^3x\,\partial_i p \qquad \longrightarrow \qquad \vec{K} = (0, 0, K)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad \longrightarrow \qquad K = \int_V d^3x\,\rho g = V\rho g \qquad \longrightarrow$$

Archimedisches Prinzip: Auftriebskraft = Gewicht der verdrängten Flüssigkeit

ii. Isotherme Atmosphäre

N.B.: kein realistisches Modell für die Erdatmosphäre

Vor.: ideales Gas $\quad p = \rho\frac{kT}{M_{\text{Molekül}}}$

$$\longrightarrow \qquad P(p) = \int_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho(p')} = \frac{kT}{M_M}\int_{p_0}^{p}\frac{dp'}{p'} = \frac{kT}{M_M}\ln\frac{p}{p_0}$$

Eulersche Gleichung: $\frac{kT}{M_M}\ln\frac{p}{p_0} + gz =$ konstant

Randbedingung: $p(z=0) = p_0$ $\longrightarrow$

barometrische Höhenformel:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{M_M g z}{kT}}$$

Abfall der Dichte (und des Druckes) auf den e-ten Teil für

$$z = H = \frac{kT}{M_M g} = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{10^5\,\mathrm{Pa}}{1.3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 7.8 \ \mathrm{km}$$

Vergleich: 9/10 der Luftmasse bis zu einer Höhe von 20 km

$$\underline{\text{Stationäre Strömung:} \ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}}$$

Euler: $\quad \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \vec{v}^2 - \vec{f} + \vec{\nabla} P = \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + u + P \right)$

skalare Multiplikation mit $\vec{v}$ $\quad \longrightarrow \quad$ $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + u + P \right) = 0$

Gesetz von Bernoulli: entlang einer Stromlinie (Tangente immer parallel $\vec{v}$) ist

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + u + P = \text{konstant}$$

wird auch als „hydrodynamisches Paradoxon“ bezeichnet, tatsächlich aber Ausdruck der Energieerhaltung: $\frac{\vec{v}^2}{2} + P =$ kinetische Energie/Masse

atomistische Erklärung: je größer die makroskopische Geschwindigkeit $|\vec{v}|$, desto kleiner ist der Impulsübertrag auf die Wand bei gleicher kinetischer Energie $\longrightarrow$ P kleiner

weitergehende Aussage für wirbelfreie stationäre Strömung

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \qquad \underline{\text{und}} \qquad \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0} \qquad \longrightarrow$$

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + u + P = \text{konstant in gesamter Flüssigkeit}$$

Torricelli-Versuch

Vor.: Gefäß sehr groß $\longrightarrow$
Flüssigkeit annähernd stationär
$\rho =$ konstant $\longrightarrow$
$\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{konstant}$
$p(z = h) \simeq p(z = 0), \ \ v(z = h) = 0$

$$\frac{\vec{v}^{\,2}(z=0)}{2} + \frac{p(0)}{\rho} = \frac{\vec{v}^{\,2}(z=h)}{2} + \frac{p(h)}{\rho} + gh$$

$\longrightarrow \qquad v(z=0) = \sqrt{2gh} \qquad \longrightarrow \qquad$ „freier Fall“ der Flüssigkeit

<u>Euler-Gleichung im rotierenden Bezugssystem der Erde</u>

Coriolis-Kraft muss berücksichtigt werden

$$\rho\left(\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}$$

dominante Windbewegung: räumlich und zeitlich annähernd konstant $\quad\longrightarrow\quad \dfrac{d\vec{v}}{dt} \simeq \vec{0}$

$$2\rho\,\vec{\Omega}\times\vec{v} = -\vec{\nabla}p - \rho g\vec{e}_3$$

Wind auf Erde: $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2$

<u>Vertikalanteil</u>:

$$2\rho\vec{e}_3\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{v}) \simeq 0 = -\vec{e}_3\cdot\vec{\nabla}p - \rho g = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

$\longrightarrow \qquad$ barometrische Höhenformel (für isotherme Atmosphäre)

<u>Horizontalanteil</u>:

$\vec{\Omega} = \omega(\cos\varphi\vec{e}_2 + \sin\varphi\vec{e}_3), \qquad \omega = 2\pi/(1\ \text{Tag})$

$\vec{e}_2\times\vec{v} \sim \vec{e}_3$: kein Horizontalanteil

$\rightarrow\ 2\rho\omega\sin\varphi\vec{e}_3\times\vec{v} = -\vec{\nabla}_h p$

mit $\vec{\nabla}_h = \vec{e}_1\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2\dfrac{\partial}{\partial y}$

$\longrightarrow \qquad$ <u>geostrophischer Wind</u>: $\qquad \vec{v} = \dfrac{1}{2\rho\omega\sin\varphi}\vec{e}_3\times\vec{\nabla}_h p$

parallel zu Isobaren, da $\vec{\nabla}_h p \perp$ Isobaren

Tief(Hoch-)druckgebiet:
dominante Windkomponente gegen (im) Uhrzeigersinn auf nördlicher Halbkugel ($\sin\varphi > 0$)

VII.6 Wirbelfreie Strömung

Vor.: stationäre $\left(\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{0}\right)$, wirbelfreie ($\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$) Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit ($\rho =$ konstant)

Euler-Gleichung für $\vec{f} = -\vec{\nabla} u$ (zunächst für bel. $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} = -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}^{\,2}}{2} + u + P\right)$$

Rotation dieser Gleichung: wegen $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} A) = \vec{0}$ $\longrightarrow$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \quad \text{für} \quad \underline{\text{Wirbeldichte } \vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}}$$

$\longrightarrow$ $$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \times \vec{w} + \vec{v} \times \frac{\partial \vec{w}}{\partial t}\right), \text{ etc.} \qquad \longrightarrow$$

wenn $\vec{w}(\vec{r}, t_0) = \vec{0}$ $\longrightarrow$ $\frac{\partial^n \vec{w}(\vec{r}, t)}{\partial t^n}|_{t=t_0} = \vec{0}$

Folgerung: <u>ideale wirbelfreie Flüssigkeit bleibt immer wirbelfrei</u>

$\longrightarrow$ bei Vernachlässigung von Reibung wirbelfreie Strömung möglich

Inkompressibilität $\longrightarrow$ $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v}$

stationäre Strömung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\longrightarrow$ $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ (aus Kontinuitätsgleichung)

Stokesscher Satz:

$$0 = \int_F d\vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} = \oint_{C=\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{v}$$

für bel. F (ganz in Flüssigkeit)

Folgerung: Geschwindigkeitsfeld ist konservativ $\longrightarrow$ $\exists\ \Phi(\vec{r})$ mit $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$

aus $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi$ $\longrightarrow$

$$\underline{\text{Laplace-Gleichung}} \quad \Delta\Phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = 0$$

Bernoulli (für $\rho =$ konstant): $\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Phi)^2 + u + \frac{p - p_0}{\rho} =$ konstant

$\longrightarrow$ bei bekanntem <u>Potenzial $\Phi(\vec{r})$</u> sowohl $\vec{v}$ als auch p bestimmbar (ρ ohnedies konstant)

<u>math. Problem</u>: Lösungen der Laplace-Gleichung gesucht,
die geeignete Randbedingungen erfüllen

Beschränkung auf 2-dimensionale Strömungen (Symmetrie in z-Richtung angenommen)

$$\underline{\Delta\Phi(x, y) = 0}$$

Funktionentheorie: jede holomorphe ($\equiv$ analytische $\equiv$ reguläre) Funktion $f(z)$ der komplexen Variable $z = x + iy$ erfüllt $\Delta f = 0$

Bew. mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Diffgl. für
holomorphe Funktionen $f(z) = s(x, y) + it(x, y)$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial y}, \qquad \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\longrightarrow \qquad \Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial t}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial t}{\partial y}\right) = 0$$

analog: $\Delta t = 0$

Bezeichnung: $f(z)$ harmonische Funktion, Potenzialfunktion

Notation $(s \to \Phi, t \to \Psi)$: $\qquad f(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) \qquad$ mit $\quad \vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$

Interpretation von $\Psi(x,y)$:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\Psi = \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Psi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

$\longrightarrow \qquad \vec{\nabla}\Psi \perp \vec{v}$, andererseits $\vec{\nabla}\Psi \perp \Psi =$ konstant

$\longrightarrow \qquad$ Linien $\Psi =$ konstant sind Stromlinien: $\vec{v}$ stets tangential

$$\frac{df}{dz} = f'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_x - iv_y$$

Beispiele für 2-dimensionale Strömungen (Potenzialströmungen)

i. Lineare Strömung

$f(z) = vz = v(x+iy), \qquad v \in \mathbb{R}$

$\Phi = vx, \Psi = vy, f'(z) = v \;\to\; v_x = v, v_y = 0$

Stromlinien: $y =$ konstant

ii. Strömung um Ecke

$f(z) = az^2 = a(x^2 - y^2 + 2ixy),\; a \in \mathbb{R}$

$f'(z) = 2az = 2a(x+iy) = v_x - iv_y$

$\longrightarrow \qquad \dfrac{v_y}{v_x} = -\dfrac{y}{x}$

Stromlinien: $xy =$ konstant

Randbedg. erfüllt: $\vec{v}_\perp = \vec{0}$ an der Wand

iii. Umströmter Körper in Flüssigkeit

$\vec{v}_\perp = \vec{0}$ am Rand $\;\longrightarrow\;$ Berandung muss

Stromlinie $\Psi =$ konstant sein

Def.: Zirkulation Γ

$\qquad \Gamma[C] = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{v}$

wenn innerhalb C nur Flüssigkeit:

$\Gamma[C_1] = \oint_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{v} = \int_F d\vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} = 0$

da wirbelfrei: $\quad \text{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$

für C_2 entlang Berandung (d.h. C_2 Stromlinie) $\qquad \longrightarrow$

$$\text{i.a. } \Gamma[C_2] = \oint_{C_2} d\vec{r}\cdot\vec{v} \neq 0, \quad \text{da } d\vec{r}\,||\,\vec{v}$$

Folgerung: $\text{rot}\,\vec{v} \neq \vec{0}$ im Inneren des Körpers (wo ja keine Flüssigkeit ist)

komplexe Integration = Wegintegral in der komplexen Zahlenebene

$$\begin{aligned}\oint_C dz\, f'(z) &= \oint_C (dx + i dy)(v_x - i v_y) = \oint_C (v_x\,dx + v_y\,dy) + i \oint_C (v_x\,dy - v_y\,dx) \\ &= \oint_C d\vec{r}\cdot\vec{v} + i\ [\text{Imaginärteil}] \qquad \longrightarrow \qquad \underline{\Gamma[C] = \text{Re}\oint_C dz\, f'(z)}\end{aligned}$$

Vor.: Funktion $g(z)$ zwar nicht holomorph bei $z = 0$ (bel. Punkt im Innern des Körpers), aber in eine so genannte Laurent-Reihe entwickelbar
($g(z)$ ist eine meromorphe Funktion)

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{z^m} \qquad\qquad a_n, b_m \in \mathbb{C}$$

wenn $b_k \neq 0$ und $b_m = 0$ für $m > k$: $\quad g(z)$ hat Pol k-ter Ordnung bei $z = 0$

Residuensatz der Funktionentheorie (einfachste Version):

wenn $g(z)$ holomorph in gewissem Analytizitätsgebiet außer bei $z = 0 \qquad \longrightarrow$

$$\oint_C dz\, g(z) = 2\pi i\, b_1$$

wenn C ein beliebiger Weg im
Analytizitätsgebiet um $z = 0$
(im math. positiven Sinn, also
entgegen dem Uhrzeigersinn)
b_1 : Residuum des Pols
von $g(z)$ bei $z = 0$

Folgerung: damit Zirkulation $\Gamma \neq 0$

$$\longrightarrow \qquad f'(z) \text{ muss Term } \frac{b_1}{z} \text{ enthalten} \quad \longrightarrow \quad f(z) \text{ hat Anteil} \sim \ln z$$

Ansatz (Polarzerlegung $z = r\,e^{i\varphi}$):

$$\begin{aligned} f(z) &= -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z = -i\frac{\Gamma}{2\pi}(\ln r + i\varphi) \\ &= \frac{\Gamma\varphi}{2\pi} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \qquad \longrightarrow \qquad \text{Stromlinien}: \ r = \text{ konstant}\end{aligned}$$

typische Wirbelströmung, aber

natürlich keine Strömung im Körper,

wo rot $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\oint_C dz\, f'(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\oint_C \frac{dz}{z} = \Gamma$

<u>Allgemeine Potenzialströmung</u> (für Körper um $z = 0$)

Vor.: endliche Geschwindigkeit v_∞ für $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ (weit weg vom Körper)

$f(z) = v_\infty z - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}$

Randbedg.: Rand = Stromlinie

(durch Wahl der c_n zu erfüllen)

$\rightarrow \quad f'(z) = v_\infty + O(1/z) = v_x - iv_y$

<u>Beispiel</u>: umströmter Zylinder mit Basisradius R

$$f(z) = v_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right) - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$$

$$= v_\infty\left[x + iy + \frac{R^2}{r^2}(x - iy)\right] - i\frac{\Gamma}{2\pi}(\ln r + i\varphi)$$

$$\rightarrow \quad \Psi(x, y) = v_\infty y\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

$\rightarrow \quad \Psi =$ konstant für $r = R$

$\longrightarrow$ richtige Randbedg. für Zylinder

<u>Kraft auf umströmten Zylinder</u>

Vor.: keine äußeren Kräfte

da $\quad \sigma_{ij}dF_j = -p\,\delta_{ij}\,dF_j \quad \longrightarrow \quad \vec{K} = -\int_{\text{Oberfläche}} d\vec{F}\,p$

Modell für Tragflügel:

Zylinder mit beliebiger Basis

$\rightarrow \quad d\vec{F} \perp z-$Achse

$d\vec{F} = d\vec{r} \times \vec{e}_3\,dz = dz(dy, -dx, 0)$

$\rightarrow$ Kraft/Länge $\vec{k} = \frac{\vec{K}}{H}$

$= -\frac{1}{H}\int dz(dy, -dx, 0)\,p$

$= -\oint_{\text{Umrandung}}(dy, -dx, 0)\,p$

Wegintegrale entlang Berandung: $k_x = -\oint dy\, p, \quad k_y = \oint dx\, p, \quad k_z = 0$

komplexe Zusammenfassung: $k_y + ik_x = \oint (dx - idy)\, p = \oint dz^*\, p$

Bernoulli ($\rho =$konstant, $u = 0$): $p = D - \frac{\rho}{2}\vec{v}^2$ (D Konstante)

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= v_x - iv_y \qquad \longrightarrow \qquad \vec{v}^2 = f'(z)f'(z)^* \\
k_y + ik_x &= \oint dz^* \left(D - \frac{\rho}{2} f' f'^*\right) = -\frac{\rho}{2}\oint dz^* f'^* f' \\
dz\, f' &= dz\frac{df}{dz} = d\Phi(x,y) + id\Psi(x,y)
\end{aligned}
$$

da entlang des Körpers $\Psi =$konstant $\longrightarrow$ $d\Psi = 0$ $\longrightarrow$ $dz\, f' = dz^*\, f'^*$

endgültige Formel für Kraft/Länge (mit Verwendung des Residuensatzes)

$$
\begin{aligned}
k_y + ik_x &= -\frac{\rho}{2}\oint dz f'^2 = -\frac{\rho}{2}\oint dz \left[v_\infty - i\frac{\Gamma}{2\pi z} + O(1/z^2)\right]^2 \\
&= -\frac{\rho}{2}\oint dz \left[v_\infty^2 - i\frac{v_\infty \Gamma}{\pi z} + O(1/z^2)\right] = i\frac{\Gamma\rho v_\infty}{2\pi}\oint \frac{dz}{z} = -\Gamma\rho v_\infty
\end{aligned}
$$

Kutta-Joukowski Auftriebsformel	
$K_x = 0$	$K_y = -\Gamma\rho v_\infty H$

Folgerung: für allgemeine Profile nur von Γ und v_∞ abhängig

$\rightarrow$ Auftrieb beim Flugzeug, Magnuseffekt (rotierender Zylinder), ...

Veranschaulichung am Kreiszylinder:

$\rightarrow$ $\Gamma = \oint d\vec{r}\cdot\vec{v} < 0$

Gesamtgeschwindigkeit

oben: $v_\infty + v_{\text{Zirk}}$

unten: $v_\infty - v_{\text{Zirk}}$

Bernoulli $\longrightarrow$ $p_{\text{oben}} < p_{\text{unten}}$ $\longrightarrow$ $K_y > 0$ <u>Auftrieb</u>

andererseits: $|\vec{v}|_{\text{links}} = |\vec{v}|_{\text{rechts}}$ $\longrightarrow$ $K_x = 0$

N.B.: $K_x = 0$ unrealistisch für große Geschwindigkeiten und bei Berücksichtigung der Reibung

VII.7 Zähe Flüssigkeiten

Frühstücksexperiment: Löffel im Honig bewegen $\longrightarrow$ Gegenbeispiel für $K_x = 0$

Grund: Spannungstensor unrealistisch, geschwindigkeitsabhängige Terme (Reibung, Dissipation) müssen berücksichtigt werden $\longrightarrow$ Scherspannungen

realistischer Spannungstensor mit Reibungsanteil:

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + f_{ij}(v)$$

Näherung für kleine Geschwindigkeiten:

allgemeinster symmetrischer Tensor, der linear in v ist

$$f_{ij}(v) = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \right) + \xi\delta_{ij}\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

in vielen Fällen: Flüssigkeit inkompressibel $\longrightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$

$\rightarrow$ $\xi-$Term meist irrelevant

Zähigkeit η (Viskosität), i.a. ortsabhängig

Vereinfachung: η konstant, ρ konstant $\longrightarrow$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j}}_{=0} \right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \vec{\nabla}P + \frac{\eta}{\rho}\Delta\,\vec{v}$$

Navier-Stokes-Gleichung für zähe Flüssigkeiten

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{v} = \vec{f} - \vec{\nabla}P + \nu\Delta\,\vec{v}}$$

partielle, nichtlineare Diffgl. 2. Ordnung in $\vec{v}$

$\nu := \dfrac{\eta}{\rho}$ kinematische Zähigkeit

Dimensionen und Größenordnungen

$$[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}] = [\nu][\Delta\,\vec{v}] \quad \longrightarrow \quad [\nu] = \mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}, \quad [\eta] = [\rho\,\nu] = \mathrm{kg\,m}^{-1}\,\mathrm{s}^{-1}$$

mikroskopische Interpretation:

Längen $\sim$ Molekülabstand d, Schallgeschwindigkeit c_l $\longrightarrow$ $\eta_{\mathrm{theor}} = \rho\, c_l\, d$

	$\rho/\mathrm{kg\,m}^{-3}$	$c_l/\mathrm{m\,s}^{-1}$	d/m	$\eta_{\mathrm{theor}}/\mathrm{kg\,m}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$	η_{exp}(bei 20°C)
H_2O	10^3	$1.5\cdot10^3$	$3\cdot10^{-10}$	$5\cdot10^{-4}$	10^{-3}
Benzol	$9\cdot10^2$	$1.3\cdot10^3$	$5\cdot10^{-10}$	$6\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-4}$

Größenordnungen stimmen nicht für besonders starke Bindungskräfte:
z.B. für Glyzerin $\eta_{\mathrm{exp}} \gg \eta_{\mathrm{theor}}$

<u>Spezialfall:</u> $\vec{f} = \vec{0}, \quad p = \text{konstant}$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{v} = \nu \Delta\, \vec{v}$$

für kleine $|\vec{v}|$:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung} \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta\, \vec{v}\end{array}}$$

Standardproblem: Anfangsbedg. $\vec{v}(\vec{r}, t = 0) = \vec{v}_0(\vec{r})$ vorgegeben
Lösung gesucht für $t > 0$

$\longrightarrow \qquad \vec{v}(\vec{r}, t) = \int d^3x'\, \vec{v}_0(\vec{r}\,')\, D(\vec{r} - \vec{r}\,', t)$ mit Wärmeleitungskern $D(\vec{r} - \vec{r}\,', t)$

Bedingung: $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) D(\vec{r}, t) = 0 \qquad (t > 0)$

$D(\vec{r}, t = 0) = \delta^{(3)}(\vec{r})$

Berechnung von $D(\vec{r}, t)$ mit Standardmethode (Fourierdarstellung, z.B. Honerkamp/Römer)

$$D(\vec{r}, t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{3/2}}\, e^{-\dfrac{\vec{r}^{\,2}}{4\nu t}}$$

Gaußsche Glockenkurve $\longrightarrow$ Darstellung der $\delta-$Funktion für $t \to 0$

Ausbreitung einer lokalen Inhomogenität
(z.B.: Stein in Flüssigkeit fallen lassen)
mit kleiner werdenden Amplitude bis zum
homogenen Endzustand für $t \to \infty$

Breite $2\sqrt{\nu t}$

$\int d^3x\, D(\vec{r} - \vec{r}\,', t) = 1 \ \ \forall\, t \qquad \longrightarrow \qquad \int d^3x\, \vec{v}(\vec{r}, t) = \int d^3x\, \vec{v}_0(\vec{r})$ zeitunabhängig

Bem.: auch Wirbeldichte $\vec{w}(\vec{r}, t)$ erfüllt eine (modifizierte) Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{w} \times \vec{v}) = \nu \Delta\, \vec{w}$$

Konsequenz: Wirbeldichte (z.B. Rauchkringel) diffundiert in zäher Flüssigkeit
(zum Unterschied von der idealen Flüssigkeit)

Stationäre Strömung durch zylinderförmiges Rohr

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}, \quad \rho = \text{konstant}$$

$$\vec{f} = \vec{0}$$

Navier-Stokes: $\quad \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu \Delta\, \vec{v}$

Ansatz: $\quad \vec{v} = (v(r), 0, 0)$

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\, v_x = v(r)\frac{\partial v(r)}{\partial x} = 0 \quad \text{wegen} \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$\longrightarrow \qquad \vec{\nabla} p = \eta \Delta \vec{v} \qquad$ zu lösen

explizit:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad p = p(x) \qquad \longrightarrow \qquad \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{x-\text{abh.}} = \underbrace{\eta \Delta v(r)}_{y,z-\text{abh.}}$$

$\longrightarrow \qquad \frac{dp}{dx} = \eta \Delta v = a = \text{konstant} \qquad \longrightarrow \qquad p(x) = a\,x + b$

$b = p(0) \quad \longrightarrow \quad a = \frac{p(L) - p(0)}{L} = -\frac{|\Delta p|}{L} \qquad$ lineares Druckgefälle $\quad [p(0) > p(L)]$

verbleibende Gleichung: $\qquad \Delta v(r) = \frac{a}{\eta}$

Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten ($y = r\cos\varphi,\ z = r\sin\varphi$)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Zylinder-Symmetrie $\qquad \longrightarrow \qquad \Delta v = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = \frac{a}{\eta}$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = \frac{a}{\eta}\, r \qquad \longrightarrow \qquad r\frac{dv}{dr} = \frac{a}{2\eta}\, r^2 + c_1$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{a}{2\eta}\, r + \frac{c_1}{r} \qquad \longrightarrow \qquad v(r) = \frac{a}{4\eta}\, r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

$$v(r=0) \text{ endlich} \qquad \longrightarrow \qquad c_1 = 0$$

Randbedg. (empirischer Befund: Flüss. haftet am Rand):

$$v(r=R) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad c_2 = -\frac{a}{4\eta}\, R^2$$

Lösung: $\qquad v(r) = \frac{|\Delta p|}{4\eta L}(R^2 - r^2) \qquad$ parabolisches Geschwindigkeitsprofil

Durchflussmenge = Masse(nfluss)/Zeit

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\text{Querschnitt}} d\vec{F} \cdot \rho \vec{v} = \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr\, r \frac{|\Delta p|}{4\eta L}(R^2 - r^2) \\ &= \frac{2\pi\rho|\Delta p|}{4\eta L} \int_0^R dr (R^2 r - r^3) = \frac{\pi \rho R^4 |\Delta p|}{8\eta L} \end{aligned}$$

<u>Gesetz von Hagen-Poiseuille</u>:

stimmt nur für <u>laminare</u> (nichtturbulente) Strömungen

<u>Ähnlichkeitsgesetze</u>

Anwendung: Hochseeschifffahrt im Schwimmbecken (oder in der Badewanne)

Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\, \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta\, \vec{v}$$

Skalierung: $\vec{r} = l \vec{r}\,'$, $t = T\, t'$ $\quad \rightarrow \quad$ $\vec{v} = \frac{l}{T} \vec{v}\,' =: v_0 \vec{v}\,'$

Änderung der räumlichen Dimensionen und der Geschwindigkeiten um l, v_0

$\rightarrow$ $\vec{r}\,', t' = \frac{v_0}{l}\, t, \vec{v}\,'$ dimensionslose Größen

Navier-Stokes

$$\frac{v_0^2}{l} \frac{\partial \vec{v}\,'}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{l} \vec{v}\,' \cdot \vec{\nabla}\,' \vec{v}\,' = \vec{f} - \frac{1}{l\rho} \vec{\nabla}\,' p + \frac{v_0 \nu}{l^2} \Delta'\, \vec{v}\,'$$

Multiplikation mit l/v_0^2:

$$\frac{\partial \vec{v}\,'}{\partial t'} + \vec{v}\,' \cdot \vec{\nabla}\,' \vec{v}\,' = \frac{l}{v_0^2} \vec{f} - \vec{\nabla}\,' \frac{p}{\rho v_0^2} + \frac{\nu}{l v_0} \Delta'\, \vec{v}\,'$$

Def.:

$$p' = \frac{p}{\rho v_0^2}, \quad \vec{f}\,' = \frac{l}{v_0^2} \vec{f}, \qquad \underline{\text{Reynolds-Zahl}} \quad \text{Re} = \frac{l v_0}{\nu} = \frac{l v_0 \rho}{\eta}$$

$$\frac{\partial \vec{v}\,'}{\partial t'} + \vec{v}\,' \cdot \vec{\nabla}\,' \vec{v}\,' = \vec{f}\,' - \vec{\nabla}\,' p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta'\, \vec{v}\,'$$

Navier-Stokes-Gleichung in dimensionsloser Form gelöst

$\longrightarrow$ damit auch Lösung bekannt für

$\vec{r} = l \vec{r}\,'$, $\vec{v} = v_0 \vec{v}\,'$, $p = \rho v_0^2 p'$, $\vec{f} = \frac{v_0^2}{l} \vec{f}\,'$ mit dem selben Re $\longrightarrow$

realistische Modellschifffahrt möglich durch geeignete Wahl von η, ρ

weitere Anwendung: Aerodynamik eines Tragflügels

N.B.: in dieser einfachsten Form Ähnlichkeitsgesetz nur für $\rho =$ konstant gültig

Kugel in (langsam) strömender zäher Flüssigkeit

Kraft auf Kugel: $p\,F \quad \longrightarrow$

$K = \rho v^2 p' R^2 F' = \rho R^2 v^2 p' F'$

dimensionslose Kraft $p'F'$:

kann nur von Re=$\dfrac{Rv\rho}{\eta}$ abhängen

$\longrightarrow \quad K = \rho R^2 v^2 f(\mathrm{Re})$

Vor.: v klein $\longrightarrow$ Reibungskraft in 1. Näherung linear in v

$$\longrightarrow \qquad K = c\frac{\rho R^2 v^2}{\mathrm{Re}} = c\eta R v \qquad \text{explizite Rechnung:} \quad c = 6\pi$$

Stokessches Gesetz: $\vec{K} = 6\pi\eta R\vec{v}\left[1 + \frac{3}{8}\mathrm{Re} + O(\mathrm{Re}^2)\right]$ für kleine Reynolds-Zahlen

Standardmethode zur Bestimmung von η: freier Fall einer Kugel in zäher Flüssigkeit

Gleichgewicht (beschleunigungsfreie Bewegung) für

$$m\vec{g} + 6\pi\eta R\vec{v} = \vec{0} \qquad \longrightarrow \qquad \eta = \frac{mg}{6\pi R v}$$

praktisches (?) Anwendungsbeispiel: Wiener in der Donau

in 1. Näherung: Kugel mit $R = 0.5$ m, $m = 100$ kg, $v = 1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

mit $\eta_{H_2O} = 10^{-3}\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$

$$K_{\text{Reibung}} = 6\pi\eta R v = 9.5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

entspricht Gewicht von 1 g $\longrightarrow$ völlig unrealistisch für tatsächliche Kraft

Grund: Trägheitskraft (dynamische Kraft) überwiegt bei weitem

für festes $\vec{r}$:

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \underbrace{-\rho\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\,\vec{v}}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{\eta\Delta\vec{v}}_{\text{Reibung}} + \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p$$

Abschätzung der Trägheitskraft im vorliegenden Fall:

Masse (Flüssigkeit)/Zeit = $\pi R^2 \rho v$, Geschwindigkeitsänderung durch Aufprall = v

$$K_{\text{Trägheit}} = \frac{\text{Impulsänderung}}{\text{Zeit}} \qquad \longrightarrow$$

$$K_{\text{Trägheit}} = \pi R^2 \rho v \cdot v \simeq 8 \cdot 10^2\ \mathrm{N} \quad \gg \text{ Reibungskraft}$$

$$\frac{K_{\text{Trägheit}}}{K_{\text{Reibung}}} \sim \frac{\pi R^2 \rho v^2}{\pi\eta R v} = \frac{R\rho v}{\eta} = \mathrm{Re} = \frac{0.5 \cdot 10^3 \cdot 1}{10^{-3}} = 5 \cdot 10^5 \gg 1$$

$\longrightarrow$ Stokessches Gesetz völlig irrelevant für Wiener in der Donau

Qualitative Diskussion

$1 \lesssim \mathrm{Re} \lesssim 10^3$: Trägheitskräfte dominieren, laminare Strömung, Zähigkeit nur in unmittelbarer Umgebung des Körpers relevant (Flüssigkeit haftet am Körper) $\longrightarrow$ Prandtlsche Grenzschicht: nur in Abständen von $l/\sqrt{\mathrm{Re}}$ hat Zähigkeit nennenswerte Auswirkungen für Körper der Dimension l $\longrightarrow$ erklärt Anwendbarkeit der idealen Flüssigkeit (Potenzialströmung)

$\mathrm{Re} \gtrsim 10^3$: keine laminare Strömung mehr, spontane Entstehung von Wirbeln $\longrightarrow$ Turbulenz

Stabilitätsanalyse für Navier-Stokes-Gleichung

kleine Störungen einer laminaren Strömung untersucht

$\mathrm{Re} \lesssim 10^3$: Störungen gedämpft $\longrightarrow$ laminare Strömung stabil

$\mathrm{Re} \gtrsim 10^3$: Störungen wachsen exponentiell mit der Zeit an
$\longrightarrow$ Instabilität, Turbulenz (Chaos)
aktuelles Forschungsgebiet der Hydrodynamik