Übungen zu T2, SS 2007, Blatt 5

21) Gegeben ist der Teilchenzustand
$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\psi_1(x) + \psi_2(x)\big)$$
mit den stationären Eigenfunktionen $\psi_n(x),\ n = 1,\ n = 2$, für den unendlich hohen Potentialtopf der Breite $2a$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $0 \le x \le a$ (d.h. in der rechten Hälfte) zu finden?

22) Berechne die stationären Eigenfunktionen $\psi_2(\xi)$ und $\psi_3(\xi)$ des harmonischen Oszillators aus der Rekursionsformel.

23) Mit dem Resultat aus Beispiel 22 zeige, dass ψ_3 proportional zu
$$\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)\psi_2$$
ist (bzw. Gleichheit falls ψ_2 und ψ_3 normiert sind).

24) Berechne $\langle\psi_0, \hat{x}\,\psi_1\rangle$ und $\langle\psi_0, \hat{p}\,\psi_1\rangle$, wobei ψ_0, ψ_1 stationäre Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind.

25) Betrachte die Superposition aus zwei reellen stationären Eigenfunktionen
$$\psi(x,t) = c_1\psi_1(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + c_2\psi_2(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t},$$
$$c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ \psi_1(x), \psi_2(x) \in \mathbb{R},\ \langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0,\ E_2 > E_1\,.$$
Berechne $|\psi|^2$ und drücke den Interferenzterm durch Winkelfunktionen aus.

26) Bestimme die Erwartungswerte $\langle\psi, \hat{H}\psi\rangle$ und $\langle\psi, \hat{H}^2\psi\rangle$ für die Wellenfunktion von Beispiel 25.

27) Seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesche Operatoren. Zeige, dass
$$\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \text{ und } i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$$
hermitesch sind.

28) Gegeben ist der Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\vec{x})$. Berechne $[\hat{H}, \hat{x}]$ und $[\hat{H}, \hat{p}]$.

29) Zeige für den harmonischen Oszillator
$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{x}\rangle = -\omega^2\langle\hat{x}\rangle\,.$$